# Un cadre réversible pour la fusion de bases propositionnelles

# A reversible framework for propositional bases merging

J. Seinturier[1] P. Drap[2] O. Papini[1]

[1] Laboratoire LSIS CNRS - Equipe INCA
[2] MAP-GAMSAU umr CNRS-MCC 694

Laboratoire LSIS, Equipe INCA
Université du Sud Toulon Var
Avenue de l'université - BP20132, 83957 LA GARDE CEDEX - FRANCE
{seinturier, papini}@univ-tln.fr, pierre.drap@gamsau.archi.fr

## Résumé

*La fusion multi-sources d'informations est un problème important dans de nombreux domaines de l'informatique. En représentation des connaissances pour l'intelligence artificielle, des approches ont été proposées pour la fusion de bases propositionnelles comme l'approche basée sur la distance de Hamming ou l'approche possibiliste, cependant aucune des approches proposées ne permet une réversibilité du processus de fusion. Dans cet article nous proposons un cadre général réversible pour la fusion d'informations ordonnées ou non, fournies par des bases elles-mêmes ordonnées ou non. Une approche sémantique de la fusion dans un cadre réversible est d'abord présentée, elle repose sur la représentation de pré-ordres totaux par des polynômes à coéfficients réels. La contrepartie syntaxique de la fusion dans un cadre réversible est ensuite exposée, elle repose sur des bases de croyances pondérées par des polynômes à coéfficients réels. Nous montrons l'équivalence des approches sémantique et syntaxique. Nous montrons ensuite comment le cadre réversible proposé permet de représenter aisément l'approche de la fusion de bases propositionnelles avec priorités implicites, basée sur la distance de Hamming et comment ce cadre généralise la révision d'un état épistémique par un autre état épistémique à la fusion d'états épistémiques.*

## Mots Clef

Représentation des connaissances, Composition de connaissances, Aide à la décision, décision.

## Abstract

*The problem of merging multiple sources information is central in several domains of computer science. In knowledge representation for artificial intelligence, several approaches have been proposed for merging propositional bases like, for example, the one based on Hamming distance or the possiblistic approach. However none of these approaches allows us the reversibility of the merging process. In this paper, we propose a very general reversible framework for merging ordered or not pieces of information coming from various sources either ordered or not. A semantic approach of fusion in the proposed reversible framework is first presented, stemming from a representation of total pre-orders by means of polynomials on real numbers. The syntactic counter-part is then presented, based on belief bases weighted by polynomials on real numbers. We show the equivalence between semantic and syntactic approaches. Finally, we show how the reversible framework is suitable for easily representing the approach of merging propositional bases based on Hamming distance and how the proposed framework is suitable for generalizing the revision of an epistemic state by an epistemic state to the fusion of epistemic states.*

## Keywords

Knowledge representation, Knowledge composition, Decision.

## 1 Introduction

La fusion d'informations provenant de différentes sources est un problème important en informatique, en particulier dans le domaine des bases de données, de la représentation des connaissances pour l'intelligence artificielle, de la décision multi-critères. Selon le domaine d'application, les informations fournies par les différentes sources peuvent être de nature différente, observations ou mesures, connaissances expertes, états épistémiques, préférences. La qualité des informations peut varier d'une source à une autre et celles-ci peuvent être incomplètes, incertaines, imprécises, contradictoires. De plus, le degré de fiabilité des sources peut varier. Dans tous les cas, il s'agit d'extraire le maximum d'informations provenant de chacune des sources sans pour autant produire des incohérences.

Parmi les différentes approches de la fusion multi-sources, les approches logiques ont suscité un intérêt croissant ces dernières années [2, 16, 13, 17, 6]. La plupart des approches de la fusion ont été développées dans le cadre de la logique classique, le plus souvent propositionnelle et sont définies d'un point de vue sémantique. Des postulats caractérisant le comportement rationnel d'opérations de fusion ont été proposés dans [12]. Plus récemment, des aproches ont été proposées pour la fusion de bases de connaissances propositionnelles [11]. Les informations dans chacune des bases ne sont pas ordonnées explicitement, cependant, pour chacune des bases, un pré-ordre total implicite local est construit à partir de la distance de Hamming entre interprétations, tout comme dans le cas de la révision de croyances, et l'opération de fusion consiste à construire un pré-ordre total global par l'aggrégation des différents pré-ordres totaux locaux. Cette approche n'est définie qu'au niveau sémantique et n'est pas itérable, à cause de l'utilisation de la distance de Hamming pour la construction des pré-ordres.

Le cadre possibiliste proposé dans [10, 3] pour la fusion de bases de connaissances propositionnelles fournit une contre-partie syntaxique pour les opérations de fusion ce qui constitue un avantage certain d'un point de vue calculatoire. Par ailleurs, l'utilisation de distributions de possibilités pour la construction de pré-ordres permet l'itérabilité du processus de fusion. Cependant, le cadre proposé ne permet pas la réversibilité des opérations de fusion ce qui est souvent souhaitable dans le cas d'applications réelles.

La réversibilité des opérations de fusion nécessite la construction d'un historique du processus de fusion. Lorsque les informations fournies par les sources sont, par exemple, des observations elles peuvent être sujettes à des erreurs d'observation et/ou de mesure et la réversibilité du processus de fusion permet déviter de refaire complètement la fusion de toutes les sources mais de se concentrer uniquement sur les sources qui ont produit des informations erronnées.

Par ailleurs, la possibilité de disposer d'un historique du processus permet de retrouver facilement les informations initiales produites par les sources et permet de fournir des explications si besoin.

Dans le cas d'applications en archéologie, différent types d'erreurs peuvent se produire. Des erreurs liées au processus de mesure : incertitude, imprécision, erreur d'instrumentation ainsi qu'à des erreurs de lecture et/ou de relevé.

Par ailleurs, plusieurs relevés d'un même objet faits à des moments différents par une même personne ou par deux personnes différentes peuvent conduire à des incohérences et nécessitent une réversibiltité du processus de fusion. En effet, le résultat de la fusion lors du premier relevé est produit à partir de mesures et d'hypothèses sur l'objet, issues de connaissances expertes. Lors de relevés suivants, de nouvelles mesures peuvent contredire les hypothèses faites prélablement lors d'un relevé précédent.

D'une façon générale les fouilles se déroulent sur plusieurs années, les relevés faits une certaine année peuvent produire des connaissances qui invalident des hypothèses faites les années précédentes, ce qui nécessite la possibilité de retour aux informations initiales.

Nous proposons un cadre réversible très général pour la fusion d'informations. Ce cadre est adapté au cas de sources ordonnées entre elles ou non ainsi qu'àu cas d'informations totalement ordonnées de façon explicite ou implicite ou encore non ordonnées. Les informations sont représentées en logique propositionnelle, et les opérations de fusion sont définies d'un point de vue sémantique et d'un point de vue syntaxique. La réversibilité des opérations de fusion est obtenue par un codage adéquat des pré-ordres sur les interprétations et sur les formules par des polynômes à coefficients réels [14, 4]. Plus précisément, nous disposons d'un ensemble $E$ de $n$ sources, chacune fournissant une base de croyances $K_i$ constituée d'un ensemble de formules propositionnelles quelconques. Le pré-ordre entre les sources est noté $\leq_E$. D'un point de vue sémantique la base de croyances est représentée par un pré-ordre total sur les interprétations de la logique propositionnelle, appelé pré-ordre local et noté $\leq_{K_i}$. L'approche sémantique de la fusion réversible consiste à construire un pré-ordre total global sur les interprétations, noté $\leq_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}$ représentant le résultat de la fusion, de façon à pouvoir retrouver les pré-ordres locaux et le pré-ordre entre les sources $\leq_E$ à partir du pré-ordre global. D'un point de vue syntaxique, la base de croyances est représentée par une base de croyances pondérée qui représente un pré-ordre total sur les formules, appelée base pondérée locale et notée $\Sigma_{K_i}$. La fusion réversible consiste à construire une base pondérée globale, notée $\leq_{\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n}$ représentant le résultat de la fusion, de façon à pouvoir retrouver les bases pondérées locales et le pré-ordre entre les sources $\leq_E$ à partir de la base pondérée globale.

La principale contribution de cet article est la proposition d'un cadre réversible très général pour la fusion de bases de croyances d'un point de vue sémantique et d'un point de vue syntaxique. Il permet de représenter le cas de sources ordonnées ou non, le cas d'informations ordonnés explicitement, ou implicitement, ou encore non-ordonnées.

– Il généralise l'approche proposée dans [19], car les bases de croyances fournies par les sources ne sont plus des ensembles de littéraux mais des ensembles de formules propositionnelles quelconques.
– Il permet de représenter dans un cadre réversible l'approche sémantique de fusion de bases propositionnelles avec priorités implicites [11] basée sur la distance de Hamming et d'en fournir la contre-partie syntaxique.
– Il généralise la révision d'un état épistémique par un état épistémique proposé dans [5] à la fusion d'états épistémiques. En effet, dans le cas où les états épistémiques sont représentés par des pré-ordres totaux, la révision d'un pré-ordre par un autre pré-ordre est un cas particulier de fusion de 2 états épistémiques avec préférence

d'une source sur l'autre.

L'article s'articule comme suit : après la Section 2 qui fixe les notations et rappelle quelques définitions sur les polynômes, la Section 3 présente le point de vue sémantique du cadre réversible pour la fusion, c'est à dire la construction d'un pré-ordre global à partir de pré-ordres locaux et du pré-ordre entre les sources représenté par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. La Section 4 présente la contre-partie syntaxique du cadre réversible pour la fusion, c'est à dire la construction d'une base pondérée globale à partir du pré-ordre entre les sources et des bases pondérées locales dont les poids sont représentés par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. Dans la section 5, l'équivalence entre approches sémantique et syntaxique est ensuite montrée. La Section 6 montre comment le cadre réversible proposé généralise l'approche sémantique de la fusion de bases propositionnelles avec priorités implicites [11] basée sur la distance de Hamming puis comment il généralise la révision d'un état épistémique par état épistémique proposé dans [5] à la fusion d'états épistémiques. La Section 7 montre comment ce cadre peut s'appliquer à l'information spatiale, en particulier, à l'archéologie sous-marine, où la fusion réversible est appliquée aux problèmes de relevés photogrammétriques [7] avant de conclure sur les perpectives en Section 8.

# 2 Préliminaires et notations

## 2.1 Notations

Le formalisme logique utilisé est celui du calcul propositionnel. Le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, est composé d'un ensemble dénombrable de variables propositionnelles, des connecteurs usuels : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, des constantes $0$, et $1$ ainsi que des parenthèses ( et ). Nous utilisons les notations classiques de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, les lettres minuscules $a,\ b, \ldots$ pour les variables propositionnelles, les lettres grecques minuscules $\phi,\ \psi, \ldots$ pour les formules, les lettres majuscules $A,\ B, \ldots$ pour les ensembles de formules ainsi que les lettres grecques majuscules $\Psi,\ \Phi,\ \ldots$ pour les états épistémiques. Pour faciliter l'écriture, une interprétation du langage est représentée par un ensemble $\omega$, ordonné selon l'ordre lexicographique sur les noms des variables propositionnelles. L'ensemble des interprétations du langage est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation $\omega$ modèle d'une formule $\phi$ est notée $\omega \models \phi$. L'ensemble des modèles de $\phi$ est noté $Mod(\phi)$. On peut étendre la notation $\models$ aux formules par $\phi \models \psi$ si et seulement si $Mod(\psi) \subseteq Mod(\phi)$.

## 2.2 Pré-ordres et polynômes

Nous rappelons brièvement quelques définitions sur les polynômes. Ceux-ci sont adaptés à la représentation de pré-ordres totaux et à leur combinaison. Ils permettent de représenter les changements de pré-ordres [14][4]. Nous présentons quelques notions sur les polynômes.

**Polynômes et support.** Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels. On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes de la forme $p = \sum_{i=0}^{n} p_i\ x^i,\ p_i \in \mathbb{R}$. On appelle décalage vers la droite de $k$ positions une multiplication par $x^k$, réciproquement, on appelle décalage vers la gauche de $k$ positions une division par $x^k$. Le support d'un polynôme $p$ est l'ensemble d'éléments de $\mathbb{N}$, noté $S_p$, composé des indices $i$ pour lesquels $p_i \neq 0$. Le support est tel que pour un polynôme $p$, $max(S_p) = deg(p)$. Avec $max(\emptyset) = 0$.

**Pré-ordres sur les polynômes.** Soit $p$ et $q$ deux polynômes à coefficients réels tels que $p = \Sigma_{i=0}^{k}\ p_i\ x^i$ et $q = \Sigma_{i=0}^{l}\ q_i\ x^i$. Afin de comparer les polynômes nous utilisons plusieurs pré-ordres :

**Maximum** Le pré-ordre suivant le maximum, noté $\leq_{MAX}$, est défini par :

$$p \leq_{MAX} q \ \text{ ssi } \ max_{i=0}^{k}(p_i) \leq max_{i=0}^{l}(q_i)$$

Le pré-ordre suivant le maximum donne plus d'importance au coefficient du polynôme ayant la plus grande valeur. Un polynôme avec un coefficient ayant une valeur élevée a un rang élevé dans le pré-ordre.

**Somme** Le pré-ordre suivant la somme, noté $\leq_{SUM}$, est défini par :

$$p \leq_{SUM} q \ \text{ ssi } \ \Sigma_{i=0}^{k} p_i \leq \Sigma_{i=0}^{l} q_i$$

Le pré-ordre suivant la somme donne plus d'importance aux polynômes ayant beaucoup de grands coefficients.

**Somme pondérée** Soit $\{a_i,\ 1 \leq i \leq k\}$ et $\{b_j,\ 1 \leq j \leq l\}$ deux ensembles de scalaires réels. Le pré-ordre suivant la somme pondérée, noté $\leq_{WS}$ est défini par :

$$p \leq_{WS} q \ \text{ ssi } \ \Sigma_{i=0}^{k} a_i \times p_i \leq \Sigma_{j=0}^{l} b_j \times q_j$$

Le pré-ordre suivant la somme pondérée fonctionne de manière analogue à celui de somme. Cependant, la pondération permet d'exprimer une priorité sur des degrés particuliers.

**Lexicographique** Le pré-ordre suivant l'ordre lexicographique, noté $\leq_{LEX}$ est défini par :

$$p \leq_{LEX} q \ \text{ ssi } \ \exists i \in \mathbb{N}\, \forall j \in \mathbb{N},\ j < i,\ (p_j = q_j \text{ et } p_i < q_i)$$

Le pré-ordre suivant l'ordre lexicographique des coefficients donne plus d'importance aux coefficients de haut degré. Plus un polynôme est de haut degré, plus il est de rang élevé.

**Maximum généralisé** Soit les vecteurs réels $v$ et $w$ formés respectivement des coefficients de $p$ et $q$ ordonnés suivant l'ordre croissant. Soit $p' = \Sigma_{i=0}^{n} v_i\ x^i$ et $q' = \Sigma_{j=0}^{m} w_j\ x^j$ deux polynômes construits respectivement à partir des composantes des vecteurs $v$ et $w$. Le pré-ordre suivant le maximum généralisé, noté $\leq_{GMAX}$ est défini par :

$$p \leq_{GMAX} q \ \text{ ssi } \ p' \leq_{LEX} q'$$

Le pré-ordre suivant le maximum généralisé donne une plus grande importance aux coefficients maximaux avec un raffinement à chaque rang de coefficient. Avec ces pré-odres sur les polynômes, nous pouvons représenter un pré-ordre quelconque.

**Représentation d'un pré-ordre par des polynômes.** Soit $(A, \leq_A)$ un ensemble fini muni d'un pré-ordre. Représenter $\leq_A$ par des polynômes nécessite une une fonction de pondération qui affecte à chaque élément $a_i$ de $A$ un polynôme. La fonction de pondération est définie de la manière suivante. Soit $rk(a_i) \in \mathbb{N}$ le rang de $a_i$ dans le pré-ordre $\leq_A$. A partir de la décomposition binaire de $rk(a_i)$, notée $(v_0, \ldots, v_m)$, avec $2^{m-1} \leq a_i < 2^m$, nous construisons un polynôme $p(a_i)$ tel que $p(a_i) = \Sigma_{i=0}^{m} v_{m-i}\ x^i$. Les polynômes obtenus sont ordonnés suivant l'ordre lexicographique pour représenter le pré-ordre $\leq_A$. Plus de détails sont donnés dans [14].

## 2.3 Fusion d'informations multi-sources

Le problème de la fusion d'informations peut se ramener à la prise de décision portant sur un domaine précis en fonction d'informations apportées par différents experts, ou agents [1] [20] [18]. Formellement, un décideur a à sa disposition un ensemble de sources informations $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ où chaque source $S_i$ regroupe l'ensemble des informations apportées par un agent. Pour faire son choix, le décideur possède deux moyens d'ordonner les informations de $S$. Tout d'abord, il peut avoir des préférences sur les agents. Certains pouvant être plus fiables que d'autres à ses yeux. Cette préférence peut être totalement arbitraire, elle peut aussi ne pas exister si la confiance est totale envers tous les agents. Comme cette préférence s'exprime entre les différentes sources sans obligation de tenir compte de leur contenu, nous appelons la préférence sur les sources préférence externe. Un deuxième type de préférences peut être exprimé. La préférence des agents eux mêmes, experts du domaine. Ceux-ci peuvent avoir des préférences sur les informations qu'ils fournissent et en faire part au décideur. Ce type de préférence qu'un agent emet de manière indépendante est appelé préférence interne. La fusion d'informations est pour le décideur l'expression d'une nouvelle préférence à partir de la préférence externe et des préférences internes. Cette préférence est appelée préférence globale. Les informations préférées globalement forment alors le résultat de la fusion. Un exemble pratique illustre ces notions.

**Exemple 1** *Inspirons nous de l'exemple donné dans [16]. Un professeur demande à ses étudiants de choisir les langages de programmation qu'ils voudraient étudier. Les langages proposés sont : SQL noté s, $O_2$ noté o, et Datalog noté d. Quand tous les étudiants ont répondu, les choix peuvent être répartis en trois groupes.*

- $S_1$ *: Apprendre SQL ou $O_2$ mais pas Datalog*
- $S_2$ *: Apprendre seulement Datalog ou seulement $O_2$*
- $S_3$ *: Apprendre SQL, $O_2$ et Datalog*

*Dans cet exemple, le décideur est le professeur, et les trois groupes d'étudiants peuvent être assimilés à trois agents. Le professeur a remarqué que les groupes ne sont pas répartis equitablement, et que le nombre d'étudiants voulant apprendre les trois langages est le plus important. Il emet donc une préférence externe pour $S_3$ par rapport à $S_1$ et à $S_2$. Les trois groupes d'étudiants sont quant à eux décidés à apprendre les langages qu'ils souhaitent. Les préférences internes à chaque source sont telles qu'elles respectent au mieux le choix des étudiants.*

L'exemple 1 montre le besoin d'un formalisme adapté pour représenter la fusion multi-sources. Dans la suite de l'article nous utiliserons cet exemple très utilisé dans la littérature pour illustrer le cadre réversible proposé pour la fusion.

# 3 Approche sémantique

Soit $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de $n$ bases propositionnelles. Chaque base $K_i$ représente l'ensemble des informations apportées par la source $S_i$ d'informations. Les informations sont représentées par des interprétations du langage propositionnel. Les préférences externes et internes sont définies comme suit.

## 3.1 Pré-ordres externes et internes.

Dans le cadre réversible de la fusion, la préférence externe et les préférences internes correspondent respectivement à un pré-ordre total externe et des pré-ordres totaux internes représentés par des polynômes. Dans ce qui suit, les éléments préférés sont les minimaux dans le pré-ordre. Nous définissons maintenant les notions de pré-ordre externe et de pré-ordre interne.

**Pré-ordre externe.** La définition d'un pré-ordre externe repose sur la définition d'une fonction de pondération externe pour un ensemble de base propositionnelles.

**Définition 1** *Soit $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de bases propositionnelles. Une fonction de pondération externe est une application $q$ telle que :*

$$\begin{array}{rccc} q: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & K_i & \longrightarrow & q(K_i) \end{array}$$

A partir de la fonction de pondération externe, nous définissons un pré-ordre externe sur l'ensemble des bases propositionnelles, noté $\leq_E$.

**Définition 2** *Un pré-ordre externe sur un ensemble de base propositionnelles $E$ est défini par :*

$$\forall K_i,\ K_j \in E,\ \ K_i \leq_E K_j \quad \textit{ssi} \quad q(K_i) \leq q(K_j)$$

Deux cas se présentent. Soit les sources sont ordonnées explicitement. Dans ce cas les poids $q(K_i)$ sont codés par des polynômes constants. Soit les sources ne sont pas ordonnées. Toutes les bases sont donc préférrées, et dans ce cas, $q$ est telle que $\forall K_i \in E,\ q(K_i) = 0$.

**Pré-ordre interne.** La définition formelle d'un pré-ordre interne repose sur la définition d'une fonction de pondération interne pour chaque base propositionnelle.

**Définition 3** *Soit $E = \{K_1, \ldots, K_n\}$ un ensemble de bases propositionnelles et $\mathcal{W}$ les interprétations du langage. Une fonction de pondération interne est telle que :*

$$\begin{array}{rccc} p_{K_i}: & \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & \omega & \longrightarrow & p_{K_i}(\omega) \end{array}$$

A partir de la fonction de pondération interne, il est possible de définir un pré-ordre interne pour une base propositionnelle $K_i$ , noté $\leq_{K_i}$.

**Définition 4** *Un pré-ordre interne sur les interprétations pour une base propositionnelle $K_i$ avec une fonction de pondération $p_{K_i}$ est défini par :*

$$\forall \omega_j,\ \omega_k \in \mathcal{W},\ \ \omega_j \leq_{K_i} \omega_k\ \ \textit{ssi}\ \ p_{K_i}(\omega_j) \leq p_{K_i}(\omega_k)$$

Il existe trois cas pour une base $K_i$. Tout d'abord, le pré-ordre peut être défini arbitrairement. Dans ce cas, les poids $p_{K_{i(\omega)}}$ sont codés par des polynômes, comme rappelé en 2.2. Par ailleurs, le pré-ordre peut être implicite, les poids $p_{K_i}$ peuvent être calculés comme par exemple avec la distance de Hamming (voir Section 6) et dans ce cas les pré-ordres sont codés par des polynômes constants. Enfin, il n'y a pas de pré-ordre défini. Cela signifie que toutes les interprétations sont préférées. Dans ce cas $\forall \omega \in \mathcal{W},\ p_{K_i}(\omega) = 0$, c'est à dire des polynômes nuls.

## 3.2 Calcul du poids global

Dans l'approche sémantique, la fusion de bases propositionnelles combine les pré-ordres internes et le pré-ordre externe afin de construire un pré-ordre global sur les interprétations. Dans le cadre réversible, les pré-ordres sont représentés par des polynômes. La réversibilité permet de retrouver les pré-ordres originaux à partir du pré-ordre global. La condition principale pour que cette propriété soit vérifiée est que les poids globaux soient indépendants de la méthode de fusion. Seule la façon de comparer les polynômes change en fonction de l'opérateur de fusion utilisé. tout d'abord, nous définissons le poids global

**Définition 5** *Soit $q(K_i)$ les poids externes pour les bases $K_i$, $i \leq 1 \leq n$. Le poids externe global est défini par $q_\oplus = \Sigma_{i=0}^{n-1} q(K_{i+1})x^{i+1}$*

A partir du polynôme correspondant au poids externe global, il est possible de retrouver les poids externes de chaque base par $q(K_i) = (q_\oplus \ mod\ x^{i+1}) \ / \ x^i$.
Le poids global doit prendre en compte le pré-ordre externe sur les bases propositionnelles. Cependant, les bases ne peuvent être identifiées de façon unique par leur rang. Il faut définir la notion de rang absolu au moyen d'une fonction inversible.

**Définition 6** *Soit $E = \{K_1,\ \ldots,\ K_n\}$ un ensemble de bases propositionnelles. Une fonction de rang absolu, notée $r$, est une fonction de $E$ dans $\mathbb{N}$ qui associe à chaque base propositionnelle $K_i$ un rang absolu $r(K_i)$ tel que :*
- *Si $K_i <_E K_j$ alors $r(K_i) < r(K_j)$*
- *Si $K_i =_E K_j$ et $i < j$ alors $r(K_i) < r(K_j)$*

Le poids global d'une interprétation est la somme de tous les poids internes décalés autant de fois que nécessaire afin que tous leurs supports soient deux à deux disjoints. La valeur du decalage est fonction du rang absolu de la base à laquelle correspond le poids interne. Une base avec un petit rang absolu entraîne un faible décalage, et inversement. Plus formellement :

**Définition 7** *Soit $E = \{K_1,\ \ldots,\ K_n\}$ un ensemble de bases propositionnelles. Soit $p_{k_i}(\omega)$, avec $1 \leq ß \leq n$ les poids internes, $q$ la fonction de pondération externe et $r$ la fonction de rang absolu pour $E$. Le poids global, noté $p_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}(\omega)$, pour une interprétation $\omega$ est tel que :*

$$p_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}(\omega) = \Sigma_{i=1}^{n} p_{K_i}(\omega)\ x^{\Sigma_{j=1}^{r(i)-1} MAX_j}$$

*avec*

$$MAX_j = max_{\omega' \in \mathcal{W}}(deg(p_{K_j}(\omega')) + 1)$$

Pour plus de lisibilité, nous ecrivons $p_\oplus(\omega)$ au lieu de $p_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}(\omega)$. Grâce à ces définition, la fusion d'informations peut être exprimée dans le cadre réversible.

## 3.3 Fusion sémantique et cadre réversible

La fusion dans l'approche sémantique est la sélection des interprétations préférées suivant un pré-ordre global. Dans le cadre réversible, le pré-ordre global, noté $\leq_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}$, est le pré-ordre sur les poids globaux. Formellement :

**Définition 8** *Soit $E = \{K_1,\ \ldots,\ K_n\}$ un ensemble de bases propositionnelles. Soit $\omega$ et $\omega'$ deux interprétations de poids globaux respectifs $p_\oplus(\omega)$ et $p_\oplus(\omega')$. Le pré-ordre global, noté $\leq_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}$, est tel que :*

$$\omega\ \leq_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n} \omega'\ \ \textit{ssi}\ \ p_\oplus(\omega) \leq p_\oplus(\omega')$$

Le résultat de la fusion est composé des interprétations minimales dans le pré-ordre global. Selon le choix de l'opérateur de fusion, la manière de comparer les polynômes de poids globaux change. Par exemple, les cinq pré-ordres sur les polynômes définis en 2.2 représentent chacun un comportement précis d'opérateur de fusion. Pour une fusion avec l'opérateur $MAX$, on utilise le pré-ordre $\leq_{MAX}$ pour comparer les polynômes $p_\oplus(\omega)$, pour une fusion avec l'opérateur $SUM$ on utilise le pré-ordre $\leq_{SUM}$ pour comparer les polynômes $p_\oplus(\omega)$, etc,...L'exemple suivant permet d'illustrer la fusion dans le cadre réversible.

**Exemple 2** *La représentation du problème de fusion présenté dans l'exemple 1 dans le cadre réversible est faite de la manière suivante : A chaque source d'information $S_i$ correspond une base propositionnelle $K_i$. Ici, $K_1 = \{(s \vee o) \wedge \neg d\}$, $K_2 = \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\}$ et $K_3 = \{s \wedge o \wedge d\}$. Le pré-ordre externe est tel que : $K_3 \leq_E K_1 =_E K_2$. Les poids externes sont donc $q(K_1) = 2$, $q(K_2) = 2$, $q(K_3) = 1$. Le poids externe global est alors $q_\oplus = 2 + 2x + 1x^2$. La fonction de rang absolu est défi nie par : $r(1) = 2$, $r(2) = 3$, $r(3) = 1$. Le tableau ci-après montre le résultat du calcul des poids internes et des poids globaux. A partir des polynômes rerpésentant les poids internes sont déduites les valeurs $MAX_1 = 2$, $MAX_2 = 3$ et $MAX_3 = 2$. Pour une interprétation $\omega_i$ la défi nition du poids global donne : $p_\oplus(\omega_i) = p_{K_3}(\omega_i) + p_{K_1}(\omega_i)x^3 + p_{K_2}(\omega_i)x^4$. Le tableau 2 rassemble les poids de chaque interprétation. Le résultat de la fusion est obtenu en utilisant un pré-ordre sur les polynômes de poids globaux (par exemple un de ceux donnés en 2.2). Par exemple, si nous utilisons l'opérateur de fusion basé sur la somme, le pré-ordre global est : $\omega_1 =_{SUM} \omega_2 =_{SUM} \omega_5 =_{SUM} \omega_7 <_{SUM} \omega_3 =_{SUM}$*

| $\omega$ | $p_{K_1}$ | $p_{K_2}$ | $p_{K_3}$ | $p_{\oplus}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_0 = \{\neg s, \neg d, \neg o\}$ | $x$ | 1 | $1 + x$ | $1 + x + x^3 + x^4$ |
| $\omega_1 = \{\neg s, \neg d, o\}$ | 1 | 0 | $x$ | $x + x^2$ |
| $\omega_2 = \{\neg s, d, \neg o\}$ | $x$ | 0 | $x$ | $x + x^3$ |
| $\omega_3 = \{\neg s, d, o\}$ | $x$ | 1 | 1 | $1 + x^3 + x^4$ |
| $\omega_4 = \{s, \neg d, \neg o\}$ | 1 | $x^2$ | $x$ | $x + x^2 + x^6$ |
| $\omega_5 = \{s, \neg d, o\}$ | 0 | 1 | 1 | $1 + x^4$ |
| $\omega_6 = \{s, d, \neg o\}$ | $x$ | 1 | 1 | $1 + x^3 + x^4$ |
| $\omega_7 = \{s, d, o\}$ | $x$ | $x^2$ | 0 | $x^3 + x^6$ |

TAB. 1 – *Interprétations et leurs poids*

$\omega_4 =_{SUM} \omega_6 <_{SUM} \omega_0$. *Le résultat de la fusion est donné par les interprétations minimales pour ce pré-ordre et* $Mod(K_1 \oplus \cdots \oplus K_n) = \{\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_5,\, \omega_7\}$.

Etudions maintenant la réversibilité du processus de fusion.

### 3.4 Réversibilité

La réversibilité permet de retrouver le pré-ordre externe et les pré-ordres internes à partir du poids global. Le nombre de bases fusionnées est donné par degré maximum plus un du polynôme de poids externe global $q_{\oplus} = \Sigma_{i=0}^{n-1}\, q(K_{i+1})x^{i+1}$. Ce polynôme permet également de retrouver le poids global associé à chaque base propositionnelle et donc de retrouver son rang absolu. Avec ces informations nous retrouvons les poids internes à partir des poids globaux associés aux interprétations. La construction des poids globaux décale les poids internes en fonction du rang absolu afin d'avoir des supports disjoints. L'opération inverse consiste à découper le poids global en poids internes en decalant à chaque fois le polynôme par le degré maximum du support correspondant au plus grand poids interne de la base. Plus formellement, la réversibilité permet de retrouver les poids internes $p_{K_i}(\omega)$ pour chaque base propositionnelle $K_i$. Pour une interprétation $\omega$ nous avons :

$$p_{K_i}(\omega) \;=\; \frac{p_{\oplus}(\omega)\; mod\; x^{\Sigma_{l=1}^{r(K_i)}(max_{r^{-1}(l)}+1)}}{x^{\Sigma_{k=1}^{r(K_i)-1}(max_{r^{-1}(k)}+1)}}$$

L'exemple suivant illustre la réversibilité du processus de fusion.

**Exemple 3** *En utilisant les résultats de l'exemple 2, nous pouvons illustrer la réversibilité. Le polynôme* $q_{\oplus} = 2 + 2x + 1x^2$ *permet de déduire que trois bases ont été fusionnées car* $deg(q_{\oplus}) + 1 = 3$*. De plus,* $q(K_1) = 2$, $q(K_2) = 2$, $q(K_3) = 1$ *et donc* $K_3 \leq_E K_1 =_E K_2$*. Les poids externes permettent de retrouver la fonction* $r$ *avec* $r(1) = 2$, $r(2) = 3$, $r(3) = 1$*. Pour l'interprétation* $\omega_3$*, avec* $p_{\oplus}(\omega_3) = 1 + x^3 + x^4$ *à l'aide des valeurs* $MAX_1 = 2$, $MAX_2 = 3$ *et* $MAX_3 = 2$ *nous obtenons* $p_{K_1}(\omega_3) = (1 + x^3 + x^4\; mod\; x^4)\; /\; x^2 = x$*. De même,* $p_{K_2}(\omega_3) = 1$ *et* $p_{K_3}(\omega_3) = 1$.

## 4 Approche Syntaxique

Soit $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\, \ldots,\, \Sigma_n\}$ un ensemble de $n$ bases pondérées. Chaque base $\Sigma_i$ correspondant à une source d'information est un ensemble de formules pondérées défini par :

$$\Sigma_i \;=\; \{(\phi_j,\; p_{\Sigma_i}(\phi_j)) \mid \phi_j \in \mathcal{L_{PC}},\; p_{\Sigma_i}(\phi_j) \in \mathbb{R}[x]\}$$

Les préférences externes et internes sont formalisées de la manière suivante.

### 4.1 Pré-ordres externes et internes

Dans le cadre réversible de la fusion pour l'approche syntaxique, la préférence externe et les préférences internes correspondent respectivement à un pré-ordre externe sur les bases pondérées et à des pré-ordres internes sur les formules représentés par des polynômes. Dans l'approche syntaxique, la relation entre préférences et pré-ordres est telle que les éléments préférés sont les maximaux des pré-ordres. Contrairement à l'approche sémantique.

**Pré-ordre externe.** La définition formelle d'un pré-ordre externe repose sur la définition d'une fonction de pondération externe pour un ensemble de sources.

**Définition 9** *Soit* $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\, \ldots,\, \Sigma_n\}$ *un ensemble de bases pondérées. Une fonction de pondération externe, notée* $q$ *est une application telle que :*

$$\begin{array}{rccc} q: & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Sigma_i & \longrightarrow & q(\Sigma_i) \end{array}$$

A partir de la fonction de pondération externe, nous définissons un pré-ordre externe sur l'ensemble des bases pondérées, noté $\leq_{\mathcal{B}}$.

**Définition 10** *Un pré-ordre externe sur un ensemble de bases pondérées* $\mathcal{B}$ *est défini par :*

$$\forall \Sigma_i,\; \Sigma_j \in \mathcal{B},\;\; \Sigma_i \leq_{\mathcal{B}} \Sigma_j \;\; ssi \;\; q(\Sigma_i) \leq q(\Sigma_j)$$

Deux cas se présentent. Soit les sources sont ordonnées explicitement. Dans ce cas les poids $q(\Sigma_i)$ sont codés par des polynômes constants. Soit les sources ne sont pas ordonnées. Toutes les bases sont donc préférées, et dans ce cas, $q$ est telle que $\forall \Sigma_i \in \mathcal{B},\; q(\Sigma_i) = 0$, c'est à dire le polynôme nul.

**Pré-ordre interne.** La définition formelle d'un pré-ordre interne repose sur la définition d'une fonction de pondération interne pour chaque base pondérée.

**Définition 11** *Soit* $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\, \ldots,\, \Sigma_n\}$ *un ensemble de base pondérées. Une fonction de pondération interne est telle que :*

$$\begin{array}{rccc} p_{\Sigma_i}: & \Sigma_i & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & \phi & \longrightarrow & p_{\Sigma_i}(\phi) \end{array}$$

A partir de la fonction de pondération interne, il est possible de définir un pré-ordre interne pour une base pondérée $\Sigma_i$ , noté $\leq_{\Sigma_i}$.

**Définition 12** *Un pré-ordre interne sur les formules pour une base pondérée* $\Sigma_i$ *avec une fonction de pondération* $p_{\Sigma_i}$ *est défini par :*

$$\forall \phi,\; \psi \in \Sigma_i,\;\; \phi \leq_{\Sigma_i} \psi \;\; ssi \;\; p_{\Sigma_i}(\phi) \leq p_{\Sigma_i}(\psi)$$

Il existe trois cas pour une base $\Sigma_i$. Tout d'abord, le pré-ordre peut être défini arbitrairement. Dans ce cas, les poids $p_{\Sigma_i}(\phi)$ sont codés par des polynômes, comme rappelé en 2.2. Ensuite, le pré-ordre peut être implicite. Les poids $p_{\Sigma_i}$ peuvent être calculés suivant différents critères (présence de certaines variables propositionnelles, ...). Enfin, il n'y a pas de pré-ordre défini. Cela signifie que toutes les formules sont préférées. Pour cela, nous représentons les poids par le polynôme nul $\forall\phi \in \Sigma_i,\ p_{\Sigma_i}(\phi) = 0$.

## 4.2 Calcul de la base pondérée globale

La fusion de bases pondérées est la construction d'une source contenant toutes les informations de chaque base, puis toutes les informations commune à deux bases, et ainsi de suite jusqu'au informations communes à toutes les bases. L'étape préliminaire à la construction de la base pondérée globale est la construction d'un poids externe global. Le polynôme de poids externe global est défini par :

**Définition 13** *Soit $q(\Sigma_i)$ les poids externes pour les bases pondérées $\Sigma_i$, $1 \leq i \leq n$. Le poids externe global est défini par $q_\otimes = \Sigma_{i=0}^{n-1} q(\Sigma_{i+1})\, x^{i+1}$.*

A partir du polynôme correspondant au poids externe global, il est possible de retrouver les poids externes de chaque base pondérée par $q(\Sigma_i) = (q_\otimes\ mod\ x^{i+1}) / x^i$.
La base pondérée globale est construite à partir de toutes les disjonctions possibles entre les formules de chaque base. A chaque disjonction est attaché un poids global. Celui-ci est calculé en fonction des poids des formules apparaissant dans la disjonction. Dans notre cadre, ce poids permet la réversibilité. Pour cela, il combine les polynômes représentant les poids internes de chaque formule apparaissant dans la disjonction de manière à pouvoir les retrouver. La même technique que pour l'approche sémantique est utilisée. La notion de décalage des supports est utilisée pour construire des polynômes de poids globaux. Ces polynômes prennent en compte le pré-ordre externe sur les bases pondérées. Nous avons donc besoin d'une fonction de rang absolu inversible.

**Définition 14** *Soit $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\ \ldots,\ \Sigma_n\}$ un ensemble de bases pondérées. Une fonction de rang absolue, notée $r$, est une fonction de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{N}$ qui associe à chaque base $\Sigma_i$ un rang absolu $r(\Sigma_i)$ tel que :*
- *Si $\Sigma_i <_{\mathcal{B}} \Sigma_j$ alors $r(\Sigma_i) < r(\Sigma_j)$*
- *Si $\Sigma_i =_{\mathcal{B}} \Sigma_j$ et $i < j$ alors $r(\Sigma_i) < r(\Sigma_j)$*

Afin de construire la base pondérée globale, on définit $D_k$ qui est la disjonction de $k$ formules chacune provenant d'une seule base $\Sigma_i$. Formellement :

**Définition 15** *On définit une disjonction de $k$ formules provenant des bases pondérées $\Sigma_i$ telle que :*

$$D_k = \phi_{j_1} \vee \cdots \vee \phi_{j_i} \vee \cdots \vee \phi_{j_k}$$

- *$\exists l,\ 1 \leq l \leq n$ tel que $\forall i$ avec $1 \leq i \leq k$ $(\phi_{j_i},\ p_{\Sigma_l}(\phi_{j_i})) \in \Sigma_l$*
- *$\forall i,\ \forall m,\ 1 \leq i \leq k$ et $1 \leq m \leq k$ si $(\phi_{j_i},\ p_{\Sigma_l}(\phi_{j_i})) \in \Sigma_l$ et $(\phi_{j_m},\ p_{\Sigma_l}(\phi_{j_m})) \in \Sigma_{l'}$ alors $l \neq l'$*

De plus, on note $s$ l'application qui à toute formule appartenant à $D_k$ fait correspondre sa base pondérée d'origine. Formellement : Soit $D_k = \phi_{j_1} \vee \cdots \vee \phi_{j_i} \vee \cdots \vee \phi_{j_k}$, si $(\phi_{ji},\ p_{\Sigma_i}(\phi_{ji})) \in \Sigma_l$, alors $s(\phi_{ji}) = \Sigma_l$.
Grâce aux disjonctions $D_k$ et à la fonction $s$, nous définissons le poids global d'une disjonction de formules.

**Définition 16** *Soit $D_k = \phi_{j_1} \vee \cdots \vee \phi_{j_i} \vee \cdots \vee \phi_{j_k}$ une disjonction de formules entre $k$ bases pondérées. correspond un poids global, noté $p_{\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n}(D_k)$ défini tel que :*

$$p_{\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n}(D_k) = \sum_{i=1}^{k} p_{s(\phi_{ji})}(\phi_{ji}) \times x^{\sum_{m=1}^{r(s(\phi_{ji}))-1} MAX_m}$$

*avec*

$$MAX_m = max_{\phi' \in \Sigma_m}(deg(p_{\Sigma_m}(\phi')) + 1)$$

Pour plus de lisibilité, nous écrivons $p_\otimes(D_k)$ au lieu de $p_{\Sigma_1 \oplus \cdots \oplus \Sigma_n}(D_k)$. La base pondérée globale est formée par toutes les disjonctions de formules entre les bases de $\mathcal{B}$ affectées d'un poids global. Plus formellement :

**Définition 17** *Soit $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\ \ldots,\ \Sigma_n\}$ un ensemble de bases pondérées. Soit $D_k$ une disjonction de $k$ formules. La base pondérée globale, notée $\Sigma_g$ peut alors s'exprimer formellement :*

$$\Sigma_g = \bigcup_{k=1}^{n} \{(D_k,\ p_\otimes(D_k))\}$$

## 4.3 Fusion syntaxique et cadre réversible

Le résultat de la fusion dans l'approche syntaxique est l'ensemble des formules pondérées de poids globaux maximaux, selon le pré-ordre global défini par :

**Définition 18** *Soit $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\ \ldots,\ \Sigma_n\}$ un ensemble de bases propositionnelles. Soit $(\phi, p_\otimes(\phi))$ et $(\psi, p_\otimes(\psi))$ deux formules de la base pondérée globale $\Sigma_g$. Le pré-ordre global, noté $\leq_{\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n}$, est tel que :*

$$\phi \leq_{\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n} \psi \text{ ssi } p_\otimes(\phi) \leq p_\otimes(\psi)$$

Selon le choix de l'opérateur de fusion, la manière de comparer les polynômes de poids global change. Par exemple pour une fusion avec l'opérateur $MAX$, on utilise le pré-ordre $\leq_{MAX}$ pour comparer les polynômes. L'exemple suivant illustre la fusion dans le cadre réversible de l'approche syntaxique.

**Exemple 4** *Soit $\mathcal{B} = \{\Sigma_1,\ \Sigma_2, \Sigma_3\}$ un ensemble de bases pondérées. Le pré-ordre externe sur les bases est défi ni arbitrairement tel que $\Sigma_3 \leq_{\mathcal{B}} \Sigma_1 =_{\mathcal{B}} \Sigma_2$ ce qui induit les poids externes $q(\Sigma_1) = 2$, $q(\Sigma_2) = 2$ et $q(\Sigma_3) = 1$. Les valeurs de la fonction $r$ sont donc $r(1) = 2$, $r(2) = 3$ et $r(3) = 1$. Les bases pondérées sont les suivantes : $\Sigma_1 = \{(\phi_1,\ 1)\}$, $\Sigma_2 = \{(\phi_2,\ 1+x)\}$ et $\Sigma_3 = \{(\phi_3,\ x^2)\}$. Nous déduisons $MAX_1 = 1$, $MAX_2 = 2$ et $MAX_3 = 3$. La base pondérée globale construite est donc :*

$$\begin{aligned}\Sigma_g \;=\{ \;& (\phi_1,\, x^3),\, (\phi_2,\, x^5+x^6),\, (\phi_3,\, x^2)\\ & (\phi_2 \vee \phi_3,\, x^2+x^5+x^6),\, (\phi_1 \vee \phi_3,\, x^2+x^3)\\ & (\phi_1 \vee \phi_2,\, x^3+x^5+x^6)\\ & (\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3,\, x^2+x^3+x^5+x^6)\}\end{aligned}$$

*Un pré-ordre global permet de caractériser le comportement de l'opération de fusion. Par exemple si l'opérateur de fusion choisi est là somme, le résultat de la fusion est :* $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3 \;=\; \{(\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3,\, x^2+x^3+x^5+x^6)\}$

## 4.4 Réversibilité

La réversibilité permet de retrouver le pré-ordre externe et les pré-ordres internes à partir du poids global. Le nombre de bases fusionnées est donné par degré maximum plus un du polynôme de poids externe global $q_\otimes$. Ce polynôme permet également de retrouver le poids global associé à chaque base pondérée et donc de son rang absolu. Avec ces informations nous retrouvons les poids interne à partir des poids globaux associés aux formules. La construction des poids globaux décale les poids internes en fonction du rang absolu des bases afin d'avoir des supports disjoints. L'opération inverse consiste à découper le poids global en poids internes en décalant à gauche à chaque fois le polynôme par le degré maximum du support à extraire. Plus formellement, la réversibilité permet de retrouver les poids internes $p_{\Sigma_i}(\phi_j)$ pour chaque base pondérée $\Sigma_i$. Plus formellement, pour une formule $\psi \;=\; \phi_k \vee \cdots \vee \phi_l$ issue de la disjonction des formules $\phi_i$ provenant de façon unique d'une base $\Sigma_i$ :

$$p_{\Sigma_i}(\phi_j) \;=\; \frac{p_\otimes(\psi) \; mod \; x^{\Sigma_{l=1}^{r(K_i)}(MAX_{r^{-1}(l)}+1)}}{x^{\Sigma_{k=1}^{r(K_i)-1}(MAX_{r^{-1}(k)}+1)}}$$

L'exemple suivant illustre la réversibilité.

**Exemple 5** *Soit la formule* $(\phi_1 \vee \phi_3,\; x^2+x^3)$ *provenant de la base pondérée globale construite dans l'exemple 4. Le polynôme* $q_\otimes \;=\; 2+2x+1x^2$ *permet de déduire que trois bases ont été fusionnées car* $deg(q_\otimes) \;+\; 1$ *= 3. De plus,* $q(\Sigma_1) \;=\; 2$, $q(\Sigma_2) \;=\; 2$, $q(\Sigma_3) \;=\; 1$. *Les poids externes permettent de retrouver la fonction* $r$ *avec* $r(1) \;=\; 2$, $r(2) \;=\; 3$, $r(3) \;=\; 1$. *Les poids Les poids internes pour les formules sont :* $p_{\Sigma_1}(\phi_1) \;=\; 1$, $p_{\Sigma_2}(\phi_2) \;=\; 1+x$ *et* $p_{\Sigma_3}(\phi_3) \;=\; x^2$.

# 5 Equivalence des approches

Nous montrons maintenant l'equivalence des approches sémantique et syntaxique dans le cadre réversible. Pour cela, nous utilisons comme pour la logique possibiliste [3] ou encore le Système Z [15] une fonction notée $\kappa_{\Sigma_i}$ qui pour chaque base pondérée $\Sigma_i$ attache à chaque interprétation $\omega \in \mathcal{W}$ le poids interne maximum des formules de $\Sigma_i$ falsifiées par $\omega$. Formellement :

**Définition 19**

$$\begin{aligned}&\forall \omega \in \mathcal{W},\\ &\kappa_{\Sigma_i}(\omega) = max(\{p_{\Sigma_i}(\phi),\; (\phi,\; p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \; et \; \omega \not\models \phi\})\end{aligned}$$

La fonction $\kappa_{\Sigma_i}$ permet d'introduire la définition de contre-partie syntaxique d'une base propositionnelle.

**Définition 20** *Soit* $E \;=\; \{K_1,\, \ldots,\, K_n\}$ *un ensemble de bases propositionnelles et soit* $\mathcal{B} \;=\; \{\Sigma_1,\, \ldots,\, \Sigma_n\}$ *un ensemble de bases pondérées, on a :*

$$\begin{aligned}&\forall i,\; 1 \le i \le n,\; \Sigma_i \; et \; K_i\\ &\Sigma_i \; est \; contre-partie \; syntaxique \; de \;\; K_i \; ssi\\ &\forall \omega \in \mathcal{W},\; \kappa_{\Sigma_i}(\omega) \;=\; p_{K_i}(\omega)\end{aligned}$$

*De plus,* $\mathcal{B}$ *est une contre-partie syntaxique de* $E$ *si et seulement si chaque base pondérée* $\Sigma_i$ *de* $\mathcal{B}$ *est une contre-partie syntaxique de* $K_i$ *de* $E$ *et* $q(K_i) \;=\; q(\Sigma_i)$. *Ce qui signifie que les pré-ordres* $\le_E$ *et* $\le_\mathcal{B}$ *sont equivalents.*

L'equivalence entre les deux approches est obtenue en construisant la contre-partie syntaxique d'un ensemble de base propositionnelles. Pour cela, nous construisons la contre-partie syntaxique d'une base propositionnelle comme suit. Pour chaque interprétation $\omega$ classée suivant l'ordre croissant des poids internes, l'algorithme passe par trois étapes.

- Générer toutes les formules falsifiées par $\omega$ Pour $K_i$ et leur attacher le poids interne $p_{K_i}(\omega)$.
- Enlever les formules falsifiées par une interprétation déjà traitée.
- Enlever les formules subsumées [1] et retirer les formules de poids nul.

L'algorithme de construction est donné par :

**Algorithm 1** contrePartieSyntaxique

$\Sigma \leftarrow \emptyset$, $M \leftarrow \emptyset$, $S \leftarrow \emptyset$, $T \leftarrow \emptyset$
**for each** $\omega \in \mathcal{W}$ **do**
 $S \leftarrow \emptyset$, $T \leftarrow \emptyset$
 $\Sigma' \leftarrow \{(D_j, p_{K_i}(\omega)),\; 1 \le j \le card(\omega),\; \omega \not\models D_j)\}$
 $M \;\leftarrow\; M \cup \Sigma'$
 $S \;\leftarrow\; \{(D_j, p_{K_i}(\omega)) \;\in\; \Sigma',\; \exists (D_j, p_{K_i}(\omega')) \;\in\; M,\; avec \;\; p_{K_i}(\omega') < p_{K_i}(\omega)\}$
 $\Sigma' \leftarrow \Sigma' \;-\; S$
 $T \;\leftarrow\; \{(D_k, p_{K_i}(\omega)) \;\in\; \Sigma' \;|\; \exists (D_j, p_{K_i}(\omega)) \;\in\; \Sigma',\; D_k \models D_j\}$
 $\Sigma' \leftarrow \Sigma' \;-\; T$
 $\Sigma \leftarrow \Sigma \cup \Sigma'$
**end for**
$\Sigma \;\leftarrow\; \{(\phi,\; p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \;|\; p_{\Sigma_i}(\phi) \;\neq\; 0\}$
retourner $\Sigma$

A partir de la construction de la contre-partie syntaxique d'un ensemble de bases de croyances propositionnelles nous montrons une équivalence entre l'approche sémantique et l'approche syntaxique pour la fusion dans le cadre réversible.

**Proposition 1** *Soit* $E \;=\; \{K_1,\; \ldots\; K_n\}$ *un ensemble de bases propositionnelles et soit* $\mathcal{B} \;=\; \{\Sigma_1,\; \ldots\; \Sigma_n\}$ *sa contre-partie syntaxique.* $\forall \omega \;\in\; \mathcal{W}$ *:* $\kappa_{\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n}(\omega) \;=\; p_{K_1 \oplus \cdots \oplus K_n}(\omega)$.

[1] $(\phi,\; p_{\Sigma_i}(\phi)$ est subsumée par $(\psi,\; p_{\Sigma_i}(\psi)$ ssi $\psi \models \phi$ et $p_{\Sigma_i}(\psi)) \le p_{\Sigma_i}(\phi)$

Cette proposition est démontrée en construisant le pré-ordre global dans l'approche sémantique et la base pondérée globale contre-partie syntaxique. Nous remarquons alors que les poids globaux sont les mêmes dans les deux approches.

## 6 Généralisation du cadre réversible

L'approche de la fusion réversible de bases de littéraux donnés dans [19] utilise des littéraux comme éléments de base. Ce sont des formules propositionnelles particulières et les résultats obtenus dans [19] s'expriment naturellement dans le cadre proposé.

La fusion propositionnelle basée sur la distance de Hamming proposée dans [18] s'exprime dans notre cadre réversible. En effet, dans l'approche originale proposée, aucun pré-ordre externe n'est utilisé. En revanche, les pré-ordres internes sont des pré-ordres implicites induits par la distance de Hamming entre les interprétations, c'est à dire le nombre de variables propositionnelles pour lesquelles deux interprétations diffèrent. Une distance entre une interprétation $\omega$ et une base propositionnelle $K_i$ est définie par $d(\omega,\ K_i) = min_{\omega' \in Mod(K_i)}(d(\omega,\ \omega'))$. Dans notre cadre, pour chaque base $K_i$ on définit $p_{K_i}(\omega) = d(\omega,\ K_i)$, c'est à dire les poids internes sont des polynômes constants. Lors de la fusion de $n$ bases propositionnelles le calcul du poids global est effectué comme exposé dans la section 3.2 les opérateurs de fusion à base de distance sont représentés dans le cadre réversible par des pré-ordres sur les polynômes. Les pré-ordres $\leq_{MAX}$, $\leq_{SUM}$, $\leq_{WS}$ et $\leq_{GMAX}$ donnés en 2.2 sont utilisés pour comparer les polynômes correspondant aux poids globaux pour les opérateurs de fusion $MAX$, $SUM$, $WS$ et $GMAX$ donnés dans [12]. Comme dans [3] le cadre proposé donne une contre-partie syntaxique pour les opérations de fusion à base de distance et de plus le cadre proposé apporte la réversibilité aux approches sémantique et syntaxique.

Nous pouvons également exprimer la révision d'un épistémique par un autre état épistémique dans notre cadre et le généraliser à la fusion d'états épistémiques. Soit $\Psi_1,\ \ldots,\ \Psi_n$, $n$ états épistémiques. Chaque état épistémique $\Psi_i$ peut être représenté par un pré-ordre total sur les interprétations $\leq_{\Psi_i}$ ou par une base pondérée $\Sigma_i$. Pour la révision, $n = 2$. Nous pouvons exprimer la révision dans notre cadre pour l'approche sémantique en représentant les deux états épistémiques $\Psi_1$ et $\Psi_2$ par deux pré-ordres internes sur les interprétations $\leq_{\Psi_1}$ et $\leq_{\Psi_2}$. Pour la révision de $\Psi_1$ par $\Psi_2$ nous avons comme pré-ordre externe $\Psi_1 <_E \Psi_2$. Pour la révision avec mémoire proposée dans [14], le pré-ordre global sur les interprétations est obtenu en utilisant le pré-ordre lexicographique $\leq_{LEX}$ sur les polynômes défini en 2.2. Avec ces hypothèses, nous retrouvons les résultats de [5]. Pour l'approche syntaxique, les deux états épistémiques $\Psi_1$ et $\Psi_2$ sont représentés respectivement par deux bases pondérées $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$. Le pré-ordre externe est le même que pour l'approche sémantique $\Psi_1 <_{\mathcal{B}} \Psi_2$. Après construction du poids global, le pré-ordre global sur les formules est obtenu en utilisant le pré-ordre lexicographique sur les polynômes. Pour $n > 2$, et pour des états épistémiques représentés par des pré-ordres totaux, le cadre réversible proposé permet de représenter la fusion d'états épistémiques.

## 7 Application à l'archéologie

L'application pour laquelle la fusion réversible est étudiée est la représentation d'objets archéologiques, que nous appelons artefact. Les mesures d'artefacts sont effectuées par photogrammétrie grâce au logiciel ARPENTEUR [8]. Le système fournit à l'archéologue un ensemble complet d'outils lui permettant de représenter les connaissances qu'il possède. De manière pratique, l'application à été développée autour de l'archéologie sous-marine et plus précisément pour l'étude de la fouille du Grand Ribaud F [9], une épave profonde étrusque découverte en 1999 par la COMEX à Hyères, dans le Var. La mesure et la gestion des amphores de l'épave sont basées sur trois sources de données fortement incomplètes. La première, notée $S_1$, représente un le modèle théorique d'une amphore. Elle contient les contraintes géométriques pour arriver à la mesure d'une amphore, une définition de sa forme et des valeurs par défaut pour ses valeurs de taille caractéristiques. Ces données évoluent à chaque étude d'une nouvelle amphore. La seconde source, $S_2$, se compose des mesures photogrammetriques faites à partir de photographies des amphores prises durant la fouille. Les données de la troisième source, $S_3$ proviennent de la mesure en laboratoire d'amphores prélevées sur le site. Le rapprochement entre la partie théorique et pratique de ce travail est situé dans la création de $S_1$ à partir de la fusion des informations provenant de $S_3$. La création d'un modèle théorique est obtenue par fusion des observations effectuées sur un corpus d'amphores en laboratoire. Nous prenons ici comme ensemble de bases pondérées $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ où chaque base représente les mesures établies à partir de 3 amphores étudiées en laboratoire. On se limitera à l'étude de trois attributs, le diamètre du cercle de col, identifié par $c$, le diamètre de la panse, identifié par $p$ et la hauteur d'une amphore, identifiée par $h$. Chaque base $\Sigma_i$ est un ensemble de triplets composés d'un fait, d'une valeur et d'un poids local. Le fait, codé par une variable propositionnelle, représentant un attribut et la valeur le résultat mesuré sur l'amphore pour cet attribut. Comme pondération pour les formules, nous utilisons des polynômes constants correspondant au numéro de l'amphore. Plus formellement :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{(c_1,\ 15.3,\ 1),\ (p_1,\ 50.5,\ 1)\} \\
\Sigma_2 &= \{(p_2,\ 56.4,\ 2),\ (h_2,\ 88.7,\ 2)\} \\
\Sigma_3 &= \{(c_3,\ 14.9,\ 3),\ (p_3,\ 51.4,\ 3),\ (h_3,\ 90.3,\ 3)\}
\end{aligned}$$

L'opérateur de fusion utilisé ici est une variante de l'opérateur de fusion réversible de majorité, $SUM$. A chaque disjonction générée, la moyenne des valeurs des triplets est calculée et devient la nouvelle valeur du triplet. Il est aussi à noter que les disjonctions prises en compte sont seulement celles qui mettent en relation des variables propositionnelles identifiant le même fait. En effet faire la moyenne d'un diamètre de cercle de col et de la hauteur d'une amphore par exemple n'est pas pertinent. Le calcul de la base fusionnée donne le résultat suivant : $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3 = \{(c_1,\ 15.3,\ 1),\ (p_1,\ 50.5,\ 1), (p_2,\ 56.4,\ x),\ (h_2,\ 88.7,\ x), (c_3,\ 14.9,\ x^2),\ (p_3,\ 51.4,\ x^2), (h_3,\ 90.3,\ x^2), (c_1 \vee c_3,\ 15.1,\ 1+x^2),\ (p_1 \vee p_2,\ 53.45,\ 1+x), (p_2 \vee p_3,\ 53.9,\ x+x^2),\ (h_2 \vee h_3,\ 89.5,\ x+x^2), (p_1 \vee p_2 \vee p_3,\ 52.77,\ 1+x+x^2)\}$

Les formules préférées pour chaque attribut possible sont $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ pour le calcul du cercle de panse, $c_1 \vee c_3$ pour le calcul du cercle de col et $h_2 \vee h_3$ pour le calcul de la hauteur. On remarque que c'est la valeur obtenue en utilisant le plus d'attributs qui est choisie, ceci correspond bien au comportement de l'opérateur de fusion $\otimes_{SUM}$.

# 8 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé un cadre réversible très général pour la fusion de bases propositionnelles qui permet de représenter dans un un même cadre le cas où les sources sont ordonnées ou non, ainsi que le cas où les informations sont ordonnées explicitement ou implicitement, ou encore non-ordonnées. Nous avons proposé une approche sémantique et une approche syntaxique de la fusion dans ce cadre réversible et nous avons montré l'équivalence des approches sémantique et syntaxique. Nous avons montré que le cadre proposé permet de représenter dans un cadre réversible l'approche sémantique de fusion de bases propositionnelles avec priorités implicites basée sur la distance de Hamming et d'en fournir la contre-partie syntaxique. Nous avons également montré que ce cadre permet de généraliser la révision d'un état épistémique par un état épistémique à la fusion d'états épistémiques dans le cas où les états épistémiques sont représentés par des pré-ordres totaux. En ce qui concerne la fusion d'informations relevant du domaine de l'archéologie sous-marine, les informations dont on dispose pour la construction d'un modèle théorique des objets archéologiques sont des connaissances expertes, des mesures photogrammétriques et mes mesures en laboratoire. Elles se représentent en logique propositionnelle et le cadre réversible proposé est adapté à la fusion ces informations. Cependant, dans le contexte de l'application de la fusion à l'information archéologique sous-marine, on est aussi amené à manipuler des informations structurées, ou semi-structurées et des informations hierarchisées. La fusion de ces informations pose le problème de leur représentation et de la généralisation du cadre réversible proposé à la fusion de ce type d'informations qui fera l'objet d'un futur travail.

# 9 Remerciements

Ce travail à été réalisé avec le soutien de la région Provence Alpes Côte d'Azur et de la Compagnie Marseillaise d'Expertise (COMEX).

# Références


[1] Roy B. *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, volume 1. Springer Verlag, 1985.

[2] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting in first order theories. *Computational Intelligence*, 8(1) :45–71, 1992.

[3] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic Merging and Distance-based Fusion of Propositional Information. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 34((1-3)) :217–252, 2002.

[4] S. Benferhat, D. Dubois, S. Lagrue, and O. Papini. Making revision reversible : an approach based on polynomials. *Fundamenta Informaticae*, 53((3-4)) :251–288, 2002.

[5] S. Benferhat, S. Konieczny, O. Papini, and R. Pino Perez. Iterated revision by epistemic states : axioms, semantics and syntax. In *Proceedings of the 14th European conference on Artificial Intelligence (ECAI 2000)*, pages 13–17, 2000.

[6] L. Cholvy. Reasoning about merging information. *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainly Management Systems*, 3 :233–263, 1998.

[7] Collectif. *Manual of photogrammetry, Fourth Edition*. American Society of Photogrammetry.

[8] P. Drap and P. Grussenmeyer. A digital photogrammetric workstation on the web. *Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, (1), 2000.

[9] P. Drap, J. Seinturier, and L. Long. Archaeological 3d modelling using digital photogrammetry and expert system. the case study of etruscan amphorae. In *The Sixth International Conference on Computer Graphics and Artificial Intelligence*, pages 177–188, DIAZO1, Clermont Ferrand, 2003.

[10] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic Logic. *in Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, 3 :439–513, 1994.

[11] S. Konieczny, J. Lang, and Pierre Marquis. Distance-based merging : A general framework and some complexity results. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 97–108, 2002.

[12] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98), Trento*, pages 488–498, 1998.

[13] J. Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83 :363–378, 1996.

[14] O. Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations (extended version). In M. A. Williams and H. Rott, editors, *Frontiers of Belief revision*, pages 279–301. Kluwer Academic Press, 2001.

[15] J. Pearl. System Z : a natural ordering of default with tractable applications to default reasoning. In *Proc. of the 3rd Conf. on Theoritical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK'90)*, volume 2, pages 121–135. Morgan Kaufmann, 2003.

[16] P. Z. Revesz. On the semantics of theory change : arbitration between old and new information. $12^{th}$ *ACM SIGACT-SGMIT-SIGART symposium on Principes of Databases*, pages 71–92, 1993.

[17] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.

[18] Konieczny S. and Pino Pérez R. Propositionnal belief base merging or how to merge belief/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3) :785–802, 2005.

[19] J. Seinturier, P. Drap, and O. Papini. Fusion réversible : application à l'information l'archéologique. *JNMR*, 2003.

[20] Meyer T., Ghose A., and Chopra S. Social choice, merging, and elections. In *Proceedings of ECSQARU'01*, volume LNAI 1695, pages 466–477, 2001.