cnrs LIS
LABORATOIRE D'INFORMATIQUE & SYSTÈMES
UMR 7020

UNIVERSITÉ DE TOULON

Intelligence Artificielle

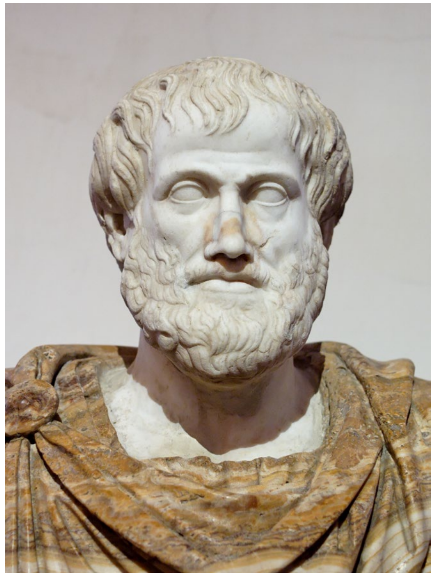
Logique Propositionnelle

Julien SEINTURIER
Maître de Conférences

Syllogisme

- Formalisé initialement par Aristote (Organon)
- **Définition:** « *Le syllogisme est un raisonnement où, certaines choses étant prouvées, une chose autre que celles qui ont été accordées se déduit nécessairement des choses qui ont été accordées.* »
- **Exemple:**

  Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme donc Socrate est mortel



Buste d'Aristote. Marbre, Lysippse (vers 330 av. J.-C.). Ancienne collection Ludovisi.

Approche logique du raisonnement

- Première approche d'une formalisation du raisonnement

Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme donc Socrate est mortel

Approche logique du raisonnement

- Première approche d'une formalisation du raisonnement

Tous les hommes sont mortels

or

Socrate est un homme

donc

Socrate est mortel

Définition

- Première approche d'une formalisation du raisonnement

Prémisse majeure	*Tous les hommes sont mortels*
	or
Prémisse mineure	*Socrate est un homme*
	donc
Conclusion	*Socrate est mortel*

- Un syllogisme met en relation deux prémisses afin de produire une conclusion
- Si la prémisse majeure et la prémisse mineure sont vraies, alors le syllogisme est dit concluant

Définition

- Limitation

Prémisse majeure	*Tous les **chats** sont mortels*
	or
Prémisse mineure	*Socrate est **mortel***
	donc
Conclusion	*Socrate est un **chat***

Syllogisme

- Limitation dans la définition

Prémisse majeure	*Tous les **chats** sont mortels*	✓
	or	
Prémisse mineure	*Socrate est **mortel***	✓
	donc	
Conclusion	*Socrate est un **chat***	✗

- La prémisse majeure et la prémisse mineure sont vraies, mais le syllogisme n'est pas concluant

- L'articulation des prémisses peut conduire à une conclusion fausse

Formalisation

- Notion de terme majeur, moyen et mineur

	moyen		majeur
Prémisse majeure	*Tous les hommes*	*sont*	*mortels*
		or	
Prémisse mineure	*Socrate*	*est un*	*homme*
		donc	
Conclusion	*Socrate*	*est*	*mortel*
	mineur		

- **Ordre** et **place d'apparition** spécifique des termes dans un syllogisme

Formalisation

- Syllogisme **valide:**
  - Présence des prémisses et de la conclusion
  - Ordre d'apparition des termes respectée

Prémisse majeure | *terme moyen sont/est terme majeur*

or

Prémisse mineure | *terme mineur est un terme moyen*

donc

Conclusion | *terme mineur est terme majeur*

- Si le syllogisme est **valide** et si la prémisse majeure et la prémisse mineure **sont vraies**, alors le syllogisme est dit concluant

Formalisation

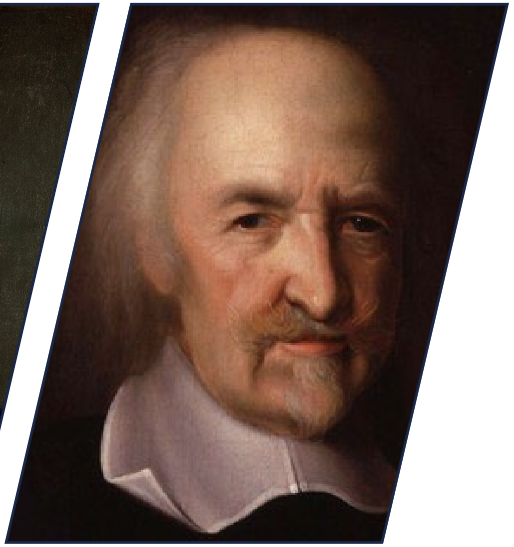
- Vue logique:

Tous les hommes sont mortels *or* *Socrate est un homme* *donc* *Socrate est mortel*	**Si** *Tous les hommes sont mortels* **et** *Socrate est un homme* **alors** *Socrate est mortel*

Intelligence, raisonnement et calcul

- Postulat: Être intelligent c’est raisonner
- « la raison [...] n'est rien d'autre que le fait de calculer »
  Léviathan (Thomas Hobbes, 1651)
- Formalisation du raisonnement
  - Algèbre de Boole (George Boole, 1854)
  - Logique propositionnelle (Gottlob Frege, 1879)
  - Machine de Turing (Allan Turing, 1936)





Leibniz (haut), Descartes (bas gauche) et Hobbes (bas droite)

But

- Cadre pour formaliser des faits et des déductions
- Automatiser le raisonnement

Le colonel moutarde a été tué cette nuit

Le colonel moutarde a été tué dans la salle à manger

Madame Rose était dans la salle à manger cette nuit

Comme le colonel moutarde a été tué dans la salle à manger et que Madame Rose était dans la salle à manger cette nuit alors on peut déduire que Madame Rose a tué le Colonel Moutarde

Logique propositionnelle

- Définie par Gottlob Frege (1848 - 1925)
- Extension du syllogisme
- Repose sur trois concepts
  - La proposition
  - Les opérateurs
  - La déduction (ou inférence)

Photographie de G. Frege, auteur inconnu (env 1879)

$$(\neg a \vee b) \wedge c \vdash d$$

Proposition

- Information sur un état de chose
  - Le ciel est bleu
  - 1 + 1 = 2

Proposition

- Information sur un état de chose
  - Le ciel est bleu
  - 1 + 1 = 2

- Assertion ayant une **valeur de vérité** pouvant être **vrai** ou **faux**
  - La lumière est allumée
  - Il y a 20 personnes dans la salle

Variable propositionnelle

- Représente une proposition
  - s: Le ciel est bleu
  - v: 1 + 1 = 2
- Peut prendre les valeurs **vrai** ou **faux** selon le contxte
  - s: (vrai le jour, faux la nuit)
  - v: (vrai en calcul décimal, faux en binaire)
  - l: La lumière est allumée
  - p: Il y a 20 personnes dans la salle

Hypothèse du monde clos

- Il n’existe pas d’autre valeur que **vrai** ou **faux**
- Si une proposition n’est pas vraie, alors elle est fausse
- Si une proposition n’est pas fausse, alors elle est vraie

Hypothèse du monde clos

- Il n'existe pas d'autre valeur que **vrai** ou **faux**
- Si une proposition n'est pas vraie, alors elle est fausse
- Si une proposition n'est pas fausse, alors elle est vraie

Certitude

- **Pas de notion d'incertitude** en logique propositionnelle
  - Je crois que la lumière est allumée
  - Il doit avoir 20 personnes dans la salle

Hypothèse du monde clos

- Il n’existe pas d’autre valeur que **vrai** ou **faux**
- Si une proposition n’est pas vraie, alors elle est fausse
- Si une proposition n’est pas fausse, alors elle est vraie

Certitude

- **Pas de notion d’incertitude** en logique propositionnelle
  - ~~Je crois que la lumière est allumée~~
  - ~~Il doit avoir 20 personnes dans la salle~~

Non représentable

Définition: Expression logique

- Une expression logique est composée:
  - De **variables propositionnelles**
  - De **connecteurs** logiques
  - De **symboles**

Définition: Expression logique

- Une expression logique est composée:
  - De **variables propositionnelles**
  - De **connecteurs** logiques
  - De **symboles**

- La **validité** d'une expression logique au sens de la syntaxe repose sur une **grammaire**
  - Ecrire une formule logique valide c'est respecter la grammaire associée

Définition: Variable propositionnelle

- Représente une proposition (ou assertion)
- Notée par une lettre minuscule
- Peut prendre la valeur vrai ou faux

a: Il fait nuit

b: Il pleut

Définition: Variable propositionnelle

- Représente une proposition (ou assertion)
- Notée par une lettre minuscule
- Peut prendre la valeur vrai ou faux

a: Il fait nuit

b: Il pleut

Définition: Connecteur

- Relie de façon logique des propositions entre elles
- Ensemble limité et défini

Connecteurs

- $\wedge$: Conjonction (et)

a: Il fait nuit

b: Il pleut

$a \wedge b$: Il fait nuit **et** il pleut

Connecteurs

- $\wedge$: Conjonction (et)
- $\vee$: Disjonction (ou inclusif)

a: Il fait nuit

b: Il pleut

$a \vee b$: Il fait nuit **ou** il pleut

Connecteurs

- $\wedge$: Conjonction (et)
- $\vee$: Disjonction (ou inclusif)
- $\neg$: Négation (non)

a: Il fait nuit

$\neg a$: Il **ne** fait **pas** nuit

Connecteurs

- $\land$: Conjonction (et)
- $\lor$: Disjonction (ou inclusif)
- $\neg$: Négation (non)
- $\rightarrow$: Implication (donc, car)

a: Il fait nuit

c: Le ciel est noir

$a \rightarrow c$: Il fait nuit **donc** le ciel est noir

$a \rightarrow c$: Le ciel est noir **car** il fait nuit

Connecteurs

- $\wedge$: Conjonction (et)
- $\vee$: Disjonction (ou inclusif)
- $\neg$: Négation (non)
- $\rightarrow$: Implication (alors)
- $\longleftrightarrow$: Equivalence (est équivalent à)

d: Henry est majeur

e: Henry a au moins 18 ans

$d \longleftrightarrow e$: Henry est majeur **est équivalent à** Henry a au moins 18 ans

Symboles

- ( ) : Parenthèses

Permettent de grouper des propositions

$$d \leftrightarrow (a \wedge b)$$

$$(a \wedge (b \vee c) \wedge d)$$

Symboles

- ( ) : Parenthèses
- ⊤ : Top (vrai)
- ⊥ : Bot (faux)

Connecteurs

- $\wedge$: Conjonction (et)
- $\vee$: Disjonction (ou inclusif)
- $\neg$: Négation (non)
- $\rightarrow$: Implication (alors)
- $\leftrightarrow$: Equivalence (est équivalent à)

Symboles

- ( ) : Parenthèses de désambiguation
- $\top$: Top (vrai)
- $\bot$: Bot (faux)

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs vrai ou faux)

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\perp$ et $\top$ sont des **formules**

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\perp$ et $\top$ sont des **formules**
  - Une **variable propositionnelle** est une **formule**

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\bot$ et $\top$ sont des **formules**
  - Une variable propositionnelle est une **formule**
- Si A et B sont des formules alors:

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\perp$ et $\top$ sont des **formules**
  - Une variable propositionnelle est une **formule**
- Si A et B sont des formules alors:
  - $A \land B$ et $A \lor B$ sont des **formules**

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\bot$ et $\top$ sont des **formules**
  - Une variable propositionnelle est une **formule**
- Si A et B sont des formules alors:
  - $A \wedge B$ et $A \vee B$ sont des **formules**
  - $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des **formules**

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\bot$ et $\top$ sont des **formules**
  - Une variable propositionnelle est une **formule**
- Si A et B sont des formules alors:
  - $A \wedge B$ et $A \vee B$ sont des **formules**
  - $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des **formules**
  - $\neg A$ est une **formule**

Formule

- Une **formule** est une **proposition** (peut prendre les valeurs Vrai ou Faux)
- Une **formule** est composée de **variables**, d'**opérateurs** et de **symboles**
- Formules atomiques:
  - $\perp$ et $\top$ sont des **formules**
  - Une variable propositionnelle est une **formule**
- Si A et B sont des formules alors:
  - $A \wedge B$ et $A \vee B$ sont des **formules**
  - $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des **formules**
  - $\neg A$ est une **formule**

Définition par induction

Notations

- Une **variable propositionnelle** est identifiée par une **lettre minuscule**

Notations

- Une variable propositionnelle est identifiée par une lettre minuscule
- Une **formule** est identifiée par une **lettre majuscule**

Notations

- Une variable propositionnelle est identifiée par une lettre minuscule
- Une formule est identifiée par une lettre majuscule
- **Variables propositionnelles** et **formules** peuvent être **indicées**

Notations

- Une variable propositionnelle est identifiée par une lettre minuscule
- Une formule est identifiée par une lettre majuscule
- Variables propositionnelles et formules peuvent être indicées

Exemple

$$F : (\neg a \lor b) \land c \rightarrow d$$

$$F_2 : a_1 \rightarrow a_2 \land a_3$$

Langage propositionnel

Formalisation de la construction précédente

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \ldots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

- **L'ensemble des formules propositionnelles**, noté $\mathcal{L}_{p0}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

- **L'ensemble des formules propositionnelles**, noté $\mathcal{L}_{p0}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

  (i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}$

  Les constantes sont des formules

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \ldots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \rightarrow, \ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(, \ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

- **L'ensemble des formules propositionnelles**, noté $\mathcal{L}_{p0}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

  (i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}$

  (ii) $\forall x \in \mathcal{P}, x \in \mathcal{L}_{p0}$

Les variables propositionnelles sont des formules

Langage propositionnel

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

- **L'ensemble des formules propositionnelles**, noté $\mathcal{L}_{p0}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

(i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}$

(ii) $\forall x \in \mathcal{P}, x \in \mathcal{L}_{p0}$

Construction par induction

(iii) $\forall A \in \mathcal{L}_{p0}, \forall B \in \mathcal{L}_{p0}, \{(A), \neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\} \in \mathcal{L}_{p0}$

Définition: Formule propositionnelle

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

- **L'ensemble des formules propositionnelles**, noté $\mathcal{L}_{p0}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

  (i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}$

  (ii) $\forall x \in \mathcal{P}, x \in \mathcal{L}_{p0}$

  (iii) $\forall A \in \mathcal{L}_{p0}, \forall B \in \mathcal{L}_{p0}, \{(A), \neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B\} \in \mathcal{L}_{p0}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$
- a

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule car $a \in \mathcal{P}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$
- a est une formule
- $a \wedge \neg b$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule car $a \in \mathcal{L}_{p0}$ et $b \in \mathcal{L}_{p0}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \land \neg b$ est une formule car $a \in \mathcal{L}_{p0}$ et $b \in \mathcal{L}_{p0}$

$\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$ car si $A \in \mathcal{L}_{p0}, \{\neg A\} \in \mathcal{L}_{p0}$

Induction

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule car $a \in \mathcal{L}_{p0}$ et $b \in \mathcal{L}_{p0}$

Induction

$\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$ car $\forall A \in \mathcal{L}_{p0}, \{\neg A\} \in \mathcal{L}_{p0}$

Induction

$\forall A \in \mathcal{L}_{p0}, \forall B \in \mathcal{L}_{p0}, \{A \wedge B\} \in \mathcal{L}_{p0}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule

  $\top \in \mathcal{S}$ et $b \in \mathcal{P}$ donc $\top \in \mathcal{L}_{p0}$ et $b \in \mathcal{L}_{p0}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule

$\top \in \mathcal{S}$ et $b \in \mathcal{P}$ donc $\top \in \mathcal{L}_{p0}$ et $b \in \mathcal{L}_{p0}$

Induction

$(\top) \in \mathcal{L}_{p0}$ et $\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule

$\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$

$\neg\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$

Induction

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule

$(\top) \in \mathcal{L}_{p0}$ et $\neg\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$

$(\top) \rightarrow \neg\neg b \in \mathcal{L}_{p0}$

Induction

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule
- $(y) \leftrightarrow b$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule
- $(y) \leftrightarrow b$ n'est pas une formule car $y \notin \mathcal{P}$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule
- $(y) \leftrightarrow b$ n'est pas une formule
- $(y \leftrightarrow) b$

Exemples

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$
- a est une formule
- $a \wedge \neg b$ est une formule
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ est une formule
- $(y) \leftrightarrow b$ n'est pas une formule
- $(y \leftrightarrow) b$ n'est pas une formule (malformation)

Formule à priorité

- Une **formule** peut être ambiguë

Formule à priorité

- Une **formule** peut être ambiguë
  - $A \lor B \land C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$
  - Plusieurs lectures possibles: $(A \lor B) \land C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$

    $A \lor B \land (C \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$

Formule à priorité

- Une **formule** peut être ambiguë
  - $A \lor B \land C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$
  - Plusieurs lectures possibles: $(A \lor B) \land C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$

    $A \lor B \land (C \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$

    …
- Définition de **priorité** sur les connecteurs

Formule à priorité

- Une **formule** peut être ambiguë
  - $A \vee B \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$
  - Plusieurs lectures possibles: $(A \vee B) \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$

    $A \vee B \wedge (C \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$

    …

- Définition de **priorité** sur les connecteurs

$\neg$	+ prioritaire
$\wedge$	
$\vee$	
$\rightarrow$	
$\leftrightarrow$	- prioritaire

Formule à priorité

- Une **formule** peut être ambiguë
  - $A \vee B \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$
  - Plusieurs lectures possibles: $(A \vee B) \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$
    $A \vee B \wedge (C \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$
    …
- Définition de **priorité** sur les connecteurs

$\neg$	+ prioritaire
$\wedge$	
$\vee$	
$\rightarrow$	
$\leftrightarrow$	- prioritaire

Priorité équivalente		S'écrit	Se lit
$\neg$	Priorité à droite	$\neg\neg A$	$\neg(\neg A)$
$\rightarrow$	Priorité à droite	$A \rightarrow B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
$\wedge, \vee, \leftrightarrow$	Priorité à gauche	$A \vee B \vee C$	$(A \vee B) \vee C$

Formule à priorité

- Exemple

$$A \vee B \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Formule à priorité

- Exemple

$$A \lor B \land C \to D \leftrightarrow \neg E$$

Sens de lecture

Formule à priorité

- Exemple

$$A \vee B \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté

Formule à priorité

- Exemple

$$A \vee B \wedge C \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨

Formule à priorité

- Exemple

$$A \vee (B \wedge C) \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨

Formule à priorité

- Exemple

$$A \lor (B \land C) \to D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨

Seconde ambiguïté

Formule à priorité

- Exemple

$$A \vee (B \wedge C) \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨

Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →

Formule à priorité

- Exemple

$$(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨
Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →

Formule à priorité

- Exemple

$$(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨
Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →
Troisième ambiguïté

Formule à priorité

- Exemple

$$(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨

Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →

Troisième ambiguïté: → est prioritaire sur ↔

Formule à priorité

- Exemple

$$((A \lor (B \land C)) \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨
Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →
Troisième ambiguïté: → est prioritaire sur ↔

Formule à priorité

- Exemple

$$((A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨
Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →
Troisième ambiguïté: → est prioritaire sur ↔
Quatrième ambiguïté

Formule à priorité

- Exemple

$$((A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D) \leftrightarrow \neg E$$

Première ambiguïté: ∧ est prioritaire sur ∨
Seconde ambiguïté: ∨ est prioritaire sur →
Troisième ambiguïté: → est prioritaire sur ↔
Quatrième ambiguïté: ¬ est prioritaire sur ↔

Formule à priorité

- Exemple

$$((A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D) \leftrightarrow (\neg E)$$

Première ambiguïté: $\wedge$ est prioritaire sur $\vee$
Seconde ambiguïté: $\vee$ est prioritaire sur $\rightarrow$
Troisième ambiguïté: $\rightarrow$ est prioritaire sur $\leftrightarrow$
Quatrième ambiguïté: $\neg$ est prioritaire sur $\leftrightarrow$

Formule stricte

- Une formule dans laquelle ambiguïtés ont été **levées par des parenthèses** est appelée **formule stricte**.

Formule stricte

- Une formule dans laquelle ambiguïtés ont été **levées par des parenthèses** est appelée **formule stricte**.

- Une formule stricte est définie telle que:

Formule stricte

- Une formule dans laquelle ambiguïtés ont été **levées par des parenthèses** est appelée **formule stricte**.

- Une formule stricte est définie telle que:
  - $\top$ et $\bot$ sont des formules strictes

Les constantes sont des formules strictes

Formule stricte

- Une formule dans laquelle ambiguïtés ont été **levées par des parenthèses** est appelée **formule stricte**.

- Une formule stricte est définie telle que:
  - $\top$ et $\bot$ sont des formules strictes
  - Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ est une formule stricte

Les variables sont des formules strictes

Formule stricte

- Une formule dans laquelle ambiguïtés ont été **levées par des parenthèses** est appelée **formule stricte**.

- Une formule stricte est définie telle que:
  - $\top$ et $\bot$ sont des formules strictes
  - Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ est une formule stricte
  - Si F est une formule stricte alors $\neg F$ est une formule stricte

La négation d'une formule stricte est une formule stricte

Formule stricte

- Une formule dans laquelle ambiguïtés ont été **levées par des parenthèses** est appelée **formule stricte**.

- Une formule stricte est définie telle que:
  - $\top$ et $\bot$ sont des formules strictes
  - Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ est une formule stricte
  - Si F est une formule stricte alors $\neg F$ est une formule stricte
  - Si E et F sont des formules strictes alors $(F \wedge E)$, $(F \vee E)$, $(F \rightarrow E)$ et $(F \leftrightarrow E)$ sont des formules strictes

Tout connecteur binaire liant des formules strictes doit être parenthésé

Définition: Formule stricte

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire

Définition: Formule stricte

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire
- **L'ensemble des formules propositionnelles strictes**, noté $\mathcal{L}_{p0}^{s}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

Définition: Formule stricte

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire
- **L'ensemble des formules propositionnelles strictes**, noté $\mathcal{L}_{p0}^{s}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

(i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

Définition: Formule stricte

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(,\ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire
- **L'ensemble des formules propositionnelles strictes**, noté $\mathcal{L}_{p0}^{s}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

(i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

(ii) $\forall v \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

Définition: Formule stricte

- Soit
  - $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles $\mathcal{P} = \{a, \dots, z\}$
  - $\mathcal{C}$ l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{C} = \{\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \rightarrow, \ \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S}$ l'ensemble des symboles $\mathcal{S} = \{(, \ ), \top, \bot\}$
  - $\mathcal{V} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ un vocabulaire
- **L'ensemble des formules propositionnelles strictes**, noté $\mathcal{L}_{p0}^{s}$, est l'ensemble $\mathcal{V}^*$ des mots formés à partir du vocabulaire $\mathcal{V}$ tel que:

(i) $\top \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ et $\bot \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

(ii) $\forall v \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

(iii) $\forall E, F \in \mathcal{L}_{p0}^{s}, \{\neg E, \neg F, (E \wedge F), (E \vee F), (E \rightarrow F), (E \leftrightarrow F)\} \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

Formule stricte

- **L'ensemble des formules strictes** est inclus dans **l'ensemble des formules propositionnelles**

$$\mathcal{L}_{p0}^{s} \subset \mathcal{L}_{p0}$$

Formule stricte

- **L'ensemble des formules strictes** est inclus dans **l'ensemble des formules propositionnelles**

$$\mathcal{L}_{p0}^{s} \subset \mathcal{L}_{p0}$$

- Toute **formule à priorité** peut être transformée en **formule stricte** équivalente.

$$A \lor B \land C \to D \leftrightarrow \neg E \quad \Longrightarrow \quad ((A \lor (B \land C)) \to D) \leftrightarrow \neg E$$

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte (i) $\forall v \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

Les variables sont des formules strictes

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$

a et b sont des formules strictes (i) $\forall v \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{L}^{s}_{p0}$

Les variables sont des formules strictes

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$

a et b sont des formules strictes $\text{(i)}\ \forall v \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

$\neg b$ est une formule stricte $\text{(ii)}\ b \in \mathcal{L}_{p0}^{s}, \neg b \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

La négation d'une formule stricte est une formule stricte

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

Tout connecteur binaire liant des formules strictes doit être parenthésé

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte

a et b sont des formules strictes (i) $\forall v \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{L}^{s}_{p0}$

$\neg b$ est une formule stricte (ii) $b \in \mathcal{L}^{s}_{p0}, \neg b \in \mathcal{L}^{s}_{p0}$

$(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte (iii) $a, \neg b \in \mathcal{L}^{s}_{p0}, (a \wedge \neg b) \in \mathcal{L}^{s}_{p0}$

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ n'est pas est une formule stricte

Les parenthèses n'encadrent que des connecteurs binaires

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ n'est pas est une formule stricte
- $((a \wedge b \vee c) \leftrightarrow b)$

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ n'est pas est une formule stricte
- $((a \wedge b \vee c) \leftrightarrow b)$ n'est pas une formule stricte

Tout connecteur binaire liant des formules strictes doit être parenthésé

Formule stricte / exemple

- Soit
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  - $\mathcal{S} = \{(,), \top, \bot\}$

- a est une formule stricte
- $(a \wedge \neg b)$ est une formule stricte
- $(\top) \rightarrow \neg\neg b$ n'est pas est une formule stricte
- $((a \wedge b \vee c) \leftrightarrow b)$ n'est pas une formule stricte

Sous-formule

- Une formule (stricte) est composée d'autres formules (strictes)

$$((a \vee (b \wedge c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$$

Sous-formule

- Une formule (stricte) est composée d'autres formules (strictes)

$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \qquad \neg e$$

Sous-formule

- Une formule (stricte) est composée d'autres formules (strictes)

$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \qquad \neg e$$

$$((a \vee (b \wedge c)) \qquad d$$

Sous-formule

- Une formule (stricte) est composée d'autres formules (strictes)

$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \qquad \neg e$$

$$((a \vee (b \wedge c)) \qquad d$$

$$a \qquad (b \wedge c)$$

Sous-formule

- Une formule (stricte) est composée d’autres formules (strictes)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & ((a \lor (b \land c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & ((a \lor (b \land c)) \rightarrow d) \arrow[dl] \arrow[d] & & \neg e \\
 & ((a \lor (b \land c)) \arrow[dl] \arrow[d] & d & & \\
a & (b \land c) \arrow[dl] \arrow[d] & & & \\
b & c & & &
\end{tikzcd}
$$

Définition: Sous-formule

- Soit $A, B, F \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ des formules strictes et soit $\odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ un connecteur binaire.

  (i) Si F est de la forme $\neg A$, alors A est une **sous-formule** de F

  (ii) Si F est de la forme $A \odot B$ alors A et B sont des **sous-formules** de F

Définition: Ensemble de sous-formule

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles, soit $\mathcal{C}_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ l'ensemble des connecteurs binaires et soit $A \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ une formule stricte.

Définition: Ensemble de sous-formule

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles, soit $\mathcal{C}_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ l'ensemble des connecteurs binaires et soit $A \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ une formule stricte.

  L'ensemble des sous formules de A, noté $\mathcal{SF}(A)$, est tel que:

Définition: Ensemble de sous-formule

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles, soit $\mathcal{C}_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ l'ensemble des connecteurs binaires et soit $A \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ une formule stricte.

L'ensemble des sous formules de A, noté $\mathcal{SF}(A)$, est tel que:

(i) $\mathcal{SF}(A) = \{A\}$, si $A \in \mathcal{P}$

L'unique sous-formule d'une variable propositionnelle est la variable elle-même

Définition: Ensemble de sous-formule

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles, soit $\mathcal{C}_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ l'ensemble des connecteurs binaires et soit $A \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ une formule stricte.

  L'ensemble des sous formules de A, noté $\mathcal{SF}(A)$, est tel que:

  (i) $\mathcal{SF}(A) = \{A\}$, si $A \in \mathcal{P}$

  (ii) $\mathcal{SF}(A) = \{\neg B\} \cup \mathcal{SF}(B)$, si $A = \neg B,\ B \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

L'ensemble des sous-formules d'une négation est l'union de la formule elle-même et de l'ensemble des sous-formules de son unique sous-formule

Définition: Ensemble de sous-formule

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles, soit $\mathcal{C}_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ l'ensemble des connecteurs binaires et soit $A \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ une formule stricte.

L'ensemble des sous formules de A, noté $\mathcal{SF}(A)$, est tel que:

(i) $\mathcal{SF}(A) = \{A\}$, si $A \in \mathcal{P}$

(ii) $\mathcal{SF}(A) = \{\neg B\} \cup \mathcal{SF}(B)$, si $A = \neg B,\ B \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$

(iii) $\mathcal{SF}(A) = \{B \odot C\} \cup \mathcal{SF}(A) \cup \mathcal{SF}(B)$, si $A = B \odot C$ avec $B, C \in \mathcal{L}_{p0}^{s}$ et $\odot \in \mathcal{C}_2$

L'ensemble des sous-formules d'une formule composée est l'union de la formule elle-même et des ensembles des sous-formules de ses deux sous-formules

Définition: Ensemble de sous-formule

- Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables propositionnelles, soit $\mathcal{C}_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ l'ensemble des connecteurs binaires et soit $A \in \mathcal{L}^s_{p0}$ une formule stricte.

  L'ensemble des sous formules de A, noté $\mathcal{SF}(A)$, est tel que:

  (i) $\mathcal{SF}(A) = \{A\}$, si $A \in \mathcal{P}$

  (ii) $\mathcal{SF}(A) = \{\neg B\} \cup \mathcal{SF}(B)$, si $A = \neg B,\ B \in \mathcal{L}^s_{p0}$

  (iii) $\mathcal{SF}(A) = \{B \odot C\} \cup \mathcal{SF}(A) \cup \mathcal{SF}(B)$, si $A = B \odot C$ avec $B, C \in \mathcal{L}^s_{p0}$ et $\odot \in \mathcal{C}_2$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e \qquad \mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \qquad C = \neg e$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \lor (b \land c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \lor (b \land c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = ((a \lor (b \land c)) \rightarrow d) \qquad C = \neg e$$

$$D = (a \lor (b \land c)) \qquad E = d$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \qquad C = \neg e$$

$$D = (a \vee (b \wedge c)) \qquad E = d$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = (a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$ $\quad$ $C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$ $\quad$ $E = d$

$F = a$ $\quad$ $G=(b \wedge c)$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = (a \vee (b \wedge c)) \to d \qquad C = \neg e$$

$$D = (a \vee (b \wedge c)) \qquad E = d$$

$$F = a \qquad G=(b \wedge c)$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = (a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$ $\quad C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$ $\quad E = d$

$F = a$ $\quad$ G=$(b \wedge c)$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = (a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$ $\quad$ $C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$ $\quad$ $E = d$

$F = a$ $\quad$ G=$(b \wedge c)$

$I = b$ $\quad$ $J = c$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

$$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$$

$$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c)\} \cup \{b\} \cup \{c\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$E = d$

$F = a$

$G = (b \wedge c)$

$I = b$

$J = c$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c)\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$E = d$

$F = a$

$G = (b \wedge c)$

$I = b$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c)\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$E = d$

$F = a$

$G = (b \wedge c)$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c)\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$$

$$C = \neg e$$

$$D = (a \vee (b \wedge c))$$

$$E = d$$

$$F = a$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

$$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$$

$$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c), b, c\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$E = d$

$F = a$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c), b, c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$E = d$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = D \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c), b, c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = (a \vee (b \wedge c)) \cup \mathcal{SF}(F) \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c), b, c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = (a \vee (b \wedge c)) \cup \{a\} \cup \mathcal{SF}(G)$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c), b, c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$D = (a \vee (b \wedge c))$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$

$\mathcal{SF}(D) = (a \vee (b \wedge c)) \cup \{a\} \cup \{(b \wedge c), b, c\}$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

$\mathcal{SF}(F) = \{a\}$

$\mathcal{SF}(G) = \{(b \wedge c), b, c\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$$

$$C = \neg e$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = \{(a \vee (b \wedge c)), a, (b \wedge c), b, c\}$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$$

$$C = \neg e$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e\} \cup \{e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = \{(a \vee (b \wedge c)), a, (b \wedge c), b, c\}$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$C = \neg e$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$\mathcal{SF}(B) = B \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e, e\}$

$\mathcal{SF}(D) = \{(a \vee (b \wedge c)), a, (b \wedge c), b, c\}$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = \{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)\} \cup \mathcal{SF}(D) \cup \mathcal{SF}(E)$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e, e\}$$

$$\mathcal{SF}(D) = \{(a \vee (b \wedge c)), a, (b \wedge c), b, c\}$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \lor (b \land c)) \to d)$

$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$

$$\mathcal{SF}(B) = \{((a \lor (b \land c)) \to d)\} \cup \{(a \lor (b \land c)), a, (b \land c), b, c\} \cup \mathcal{SF}(E)$$

$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e, e\}$

$\mathcal{SF}(D) = \{(a \lor (b \land c)), a, (b \land c), b, c\}$

$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$B = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = \{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)\} \cup \{(a \vee (b \wedge c)), a, (b \wedge c), b, c\} \cup \{d\}$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e, e\}$$

$$\mathcal{SF}(E) = \{d\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$$

$$\mathcal{SF}(A) = A \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = \{((a \lor (b \land c)) \to d), \\ (a \lor (b \land c)), a, (b \land c), b, c, d\}$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e, e\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$\mathcal{SF}(A) = \{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e\} \cup \mathcal{SF}(B) \cup \mathcal{SF}(C)$$

$$\mathcal{SF}(B) = \{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d), \big(a \vee (b \wedge c)\big), a, (b \wedge c), b, c, d\}$$

$$\mathcal{SF}(C) = \{\neg e, e\}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e$$

$$\begin{aligned}\mathcal{SF}(A) = \{&((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow \neg e,\\ &(a \vee (b \wedge c) \rightarrow d), \big(a \vee (b \wedge c)\big), a, (b \wedge c), b, c, d,\\ &\neg e, e\}\end{aligned}$$

Ensemble de sous-formules / exemple

- Ensemble des sous formules de $A = ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$

$$A = ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$$

$$\mathcal{SF}(A) = \{((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e, \\ (a \lor (b \land c) \to d), \big(a \lor (b \land c)\big), a, (b \land c), b, c, d, \\ \neg e, e\}$$

$$\mathcal{SF}(A) = \{((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e, (a \lor (b \land c) \to d), \big(a \lor (b \land c)\big), \\ (b \land c), \neg e, a, b, c, d, e\}$$

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$a \lor b \land c \to d \leftrightarrow \neg e \Longrightarrow ((a \lor (b \land c)) \to d) \leftrightarrow \neg e$

Formule stricte

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$

$\boxed{\leftrightarrow}$

Choisir l'opérateur le moins prioritaire et en faire un nœud

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

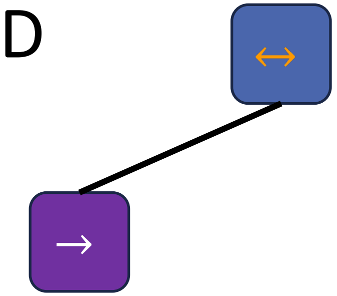
$$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$$

$\leftrightarrow$ Ce nœud devient le nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \lor (b \land c)) \to d)}_{\text{G}} \leftrightarrow \underbrace{(\neg e)}_{\text{D}}$$

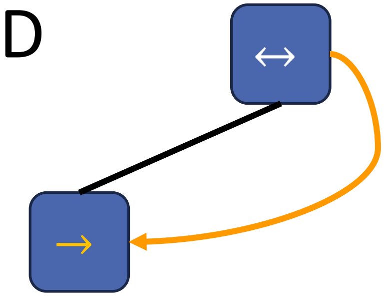


Créer un nœud avec l'opérateur le moins prioritaire à gauche et l'attacher comme fils gauche du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)}_{G} \leftrightarrow \underbrace{(\neg e)}_{D}$$

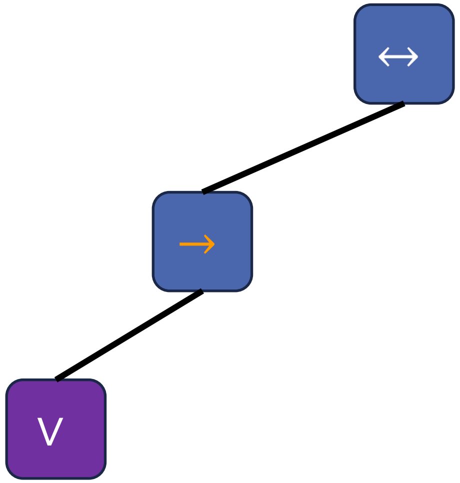


Ce nouveau nœud devient le nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c))}_{G} \rightarrow \underbrace{d)}_{D} \leftrightarrow (\neg e)$$

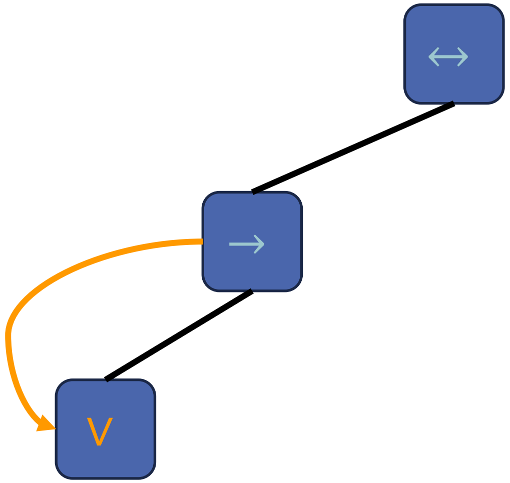


Créer un nœud avec l'opérateur le moins prioritaire à gauche et le connecter comme fils gauche du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c))}_{G} \rightarrow \underbrace{d}_{D}) \leftrightarrow (\neg e)$$

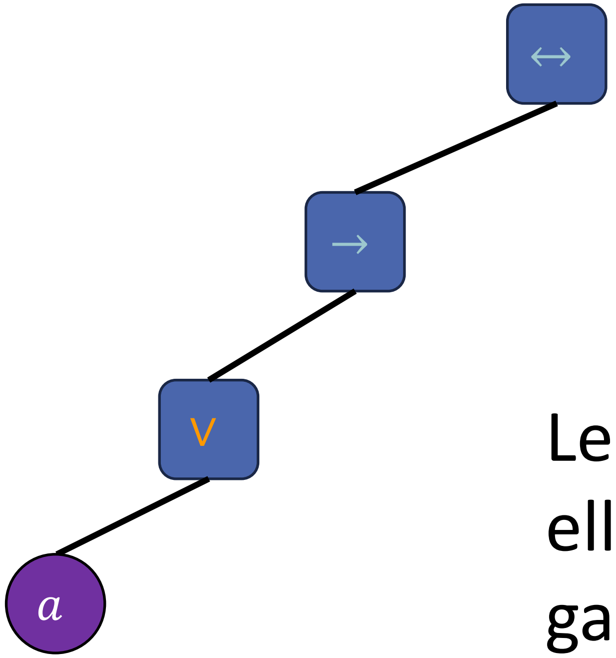


Ce nœud devient le nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$((\underbrace{a}_{G} \lor \underbrace{(b \land c)}_{D}) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$$

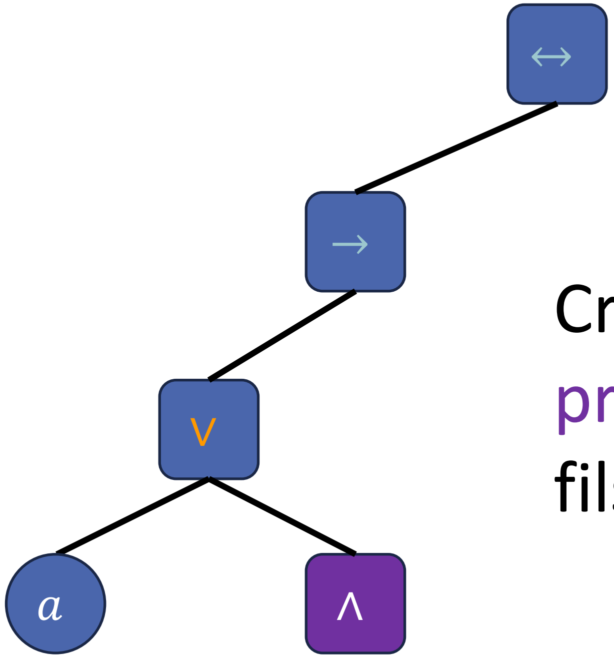


Le terme de gauche est une variable, elle est attachée comme feuille à gauche du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$((\underbrace{a}_{G} \lor \underbrace{(b \land c)}_{D}) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$$

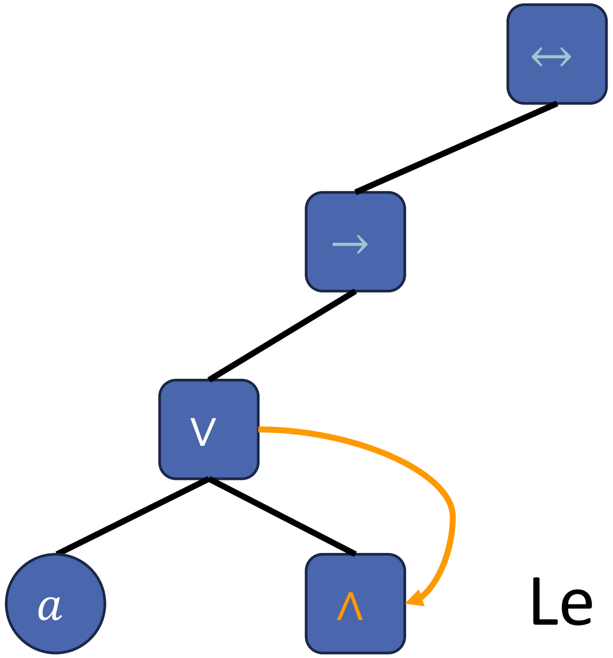


Créer un nœud avec l'opérateur le moins prioritaire à droite et le connecter comme fils droit du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$((a \lor (\underbrace{b}_{G} \land \underbrace{c}_{D})) \to d) \leftrightarrow (\neg e)$$

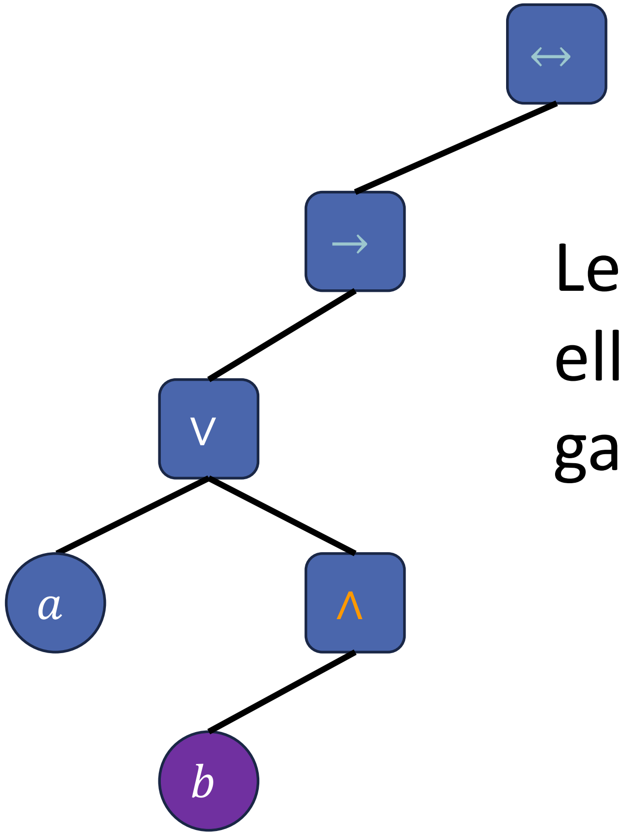


Le nouveau nœud devient le nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$((a \vee (\underbrace{b}_{G} \wedge \underbrace{c}_{D})) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$$

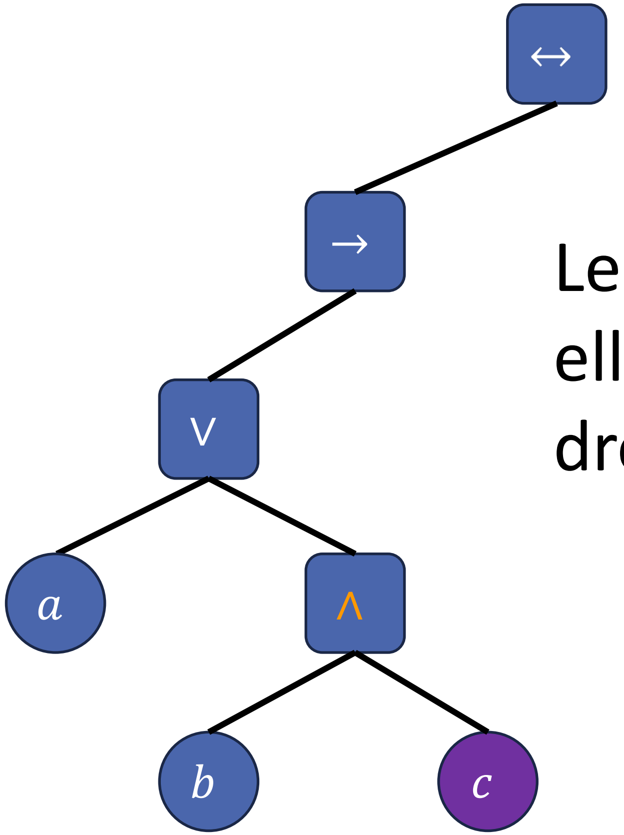


Le terme de gauche est une variable, elle est attachée comme feuille à gauche du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$((a \lor (\underbrace{b}_{G} \land \underbrace{c}_{D})) \to d) \leftrightarrow (\neg e)$$

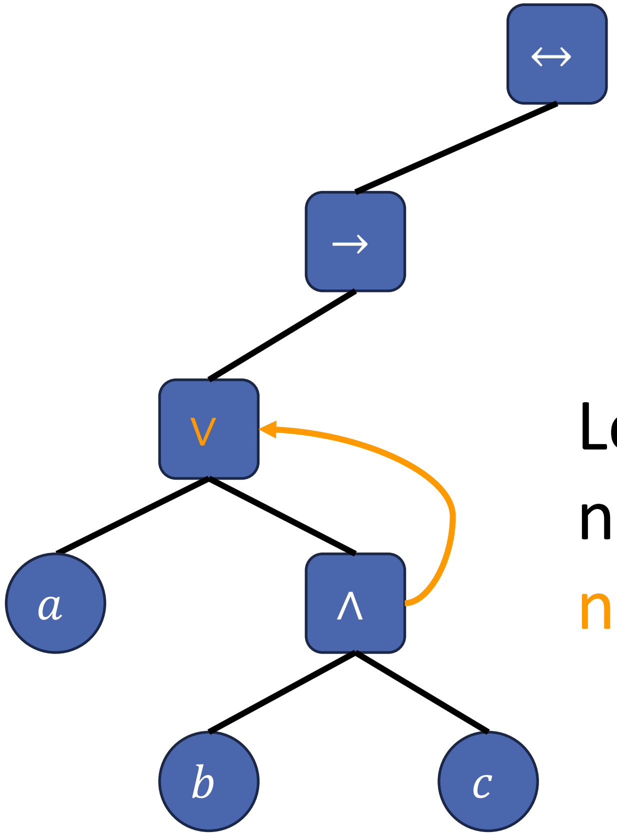


Le terme de droite est une variable, elle est attachée comme feuille à droite du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a}_{G} \lor \underbrace{(b \land c)}_{D}) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$$

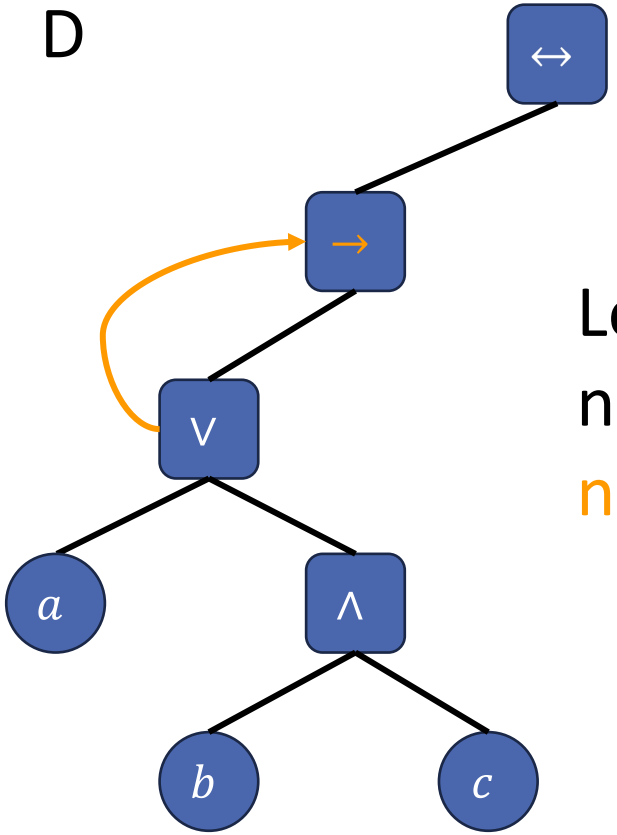


Le nœud courant ayant été traité, le nœud parent devient le nouveau nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \lor (b \land c))}_{\text{G}} \rightarrow \underbrace{d)}_{\text{D}} \leftrightarrow (\neg e)$$

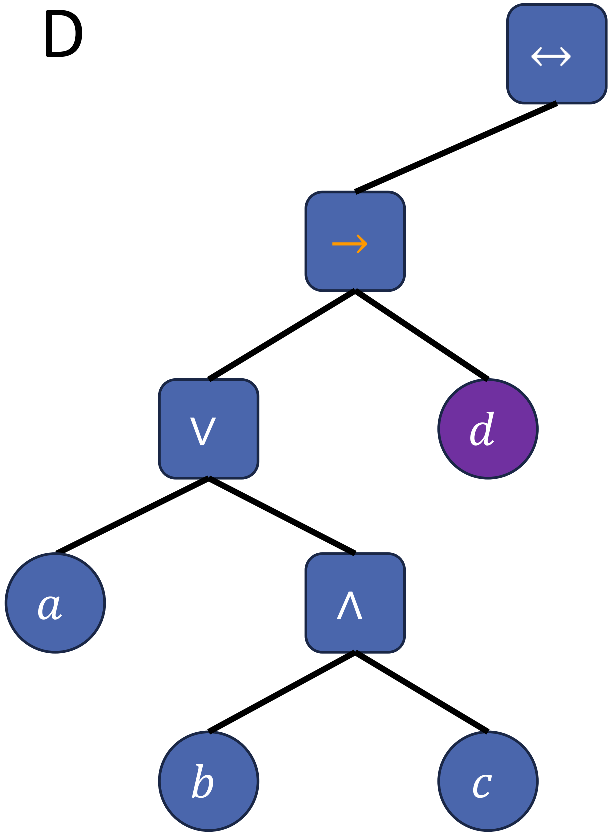


Le nœud courant ayant été traité, le nœud parent devient le nouveau nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c))}_{G} \rightarrow \underbrace{d)}_{D} \leftrightarrow (\neg e)$$

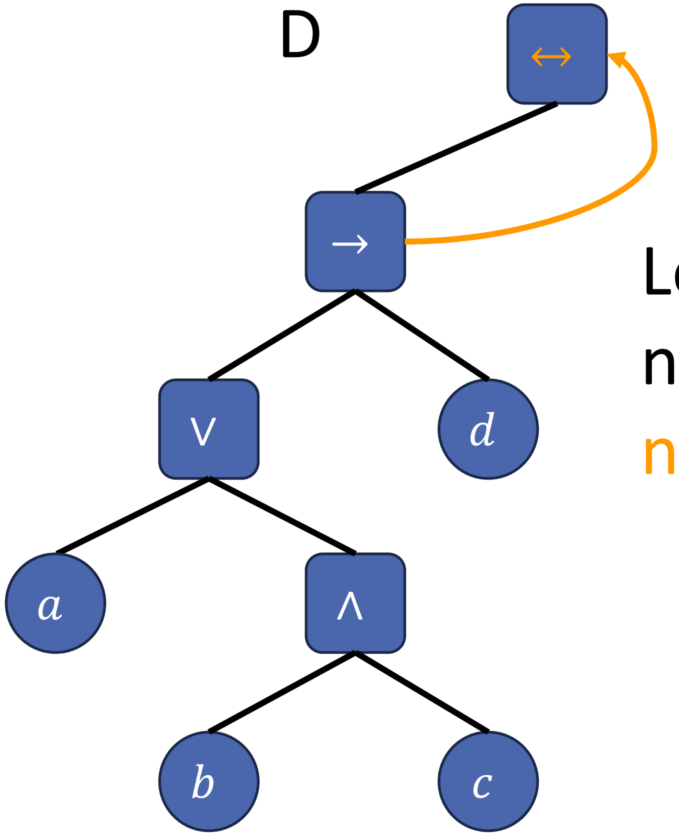


Le terme de droite est une variable, elle est attachée comme feuille à droite du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)}_{G} \leftrightarrow \underbrace{(\neg e)}_{D}$$

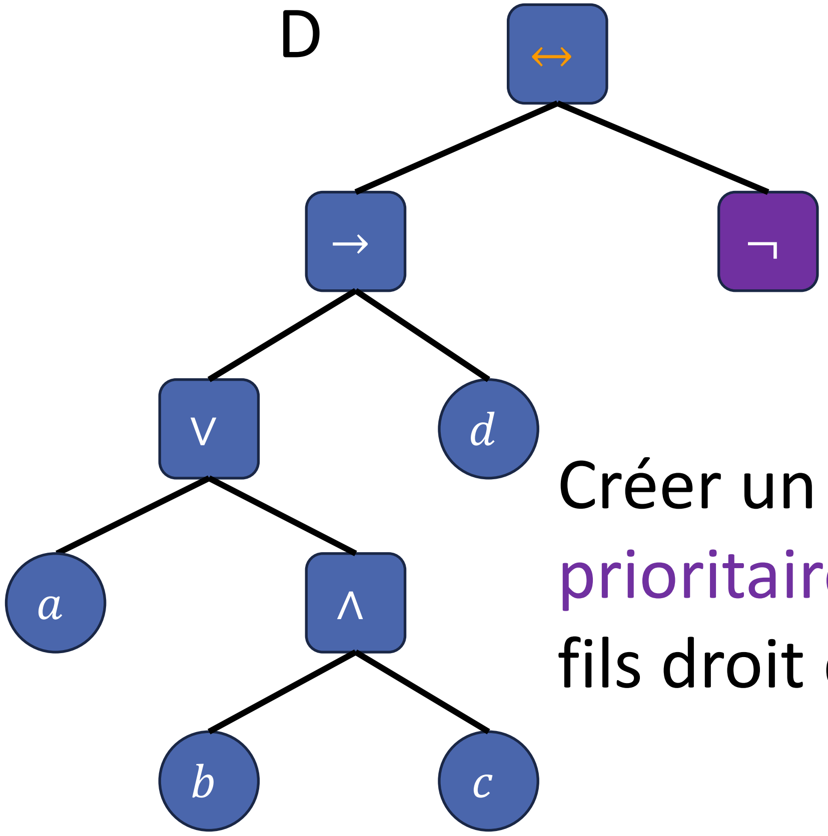


Le nœud courant ayant été traité, le nœud parent devient le nouveau nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)}_{G} \leftrightarrow \underbrace{(\neg e)}_{D}$$

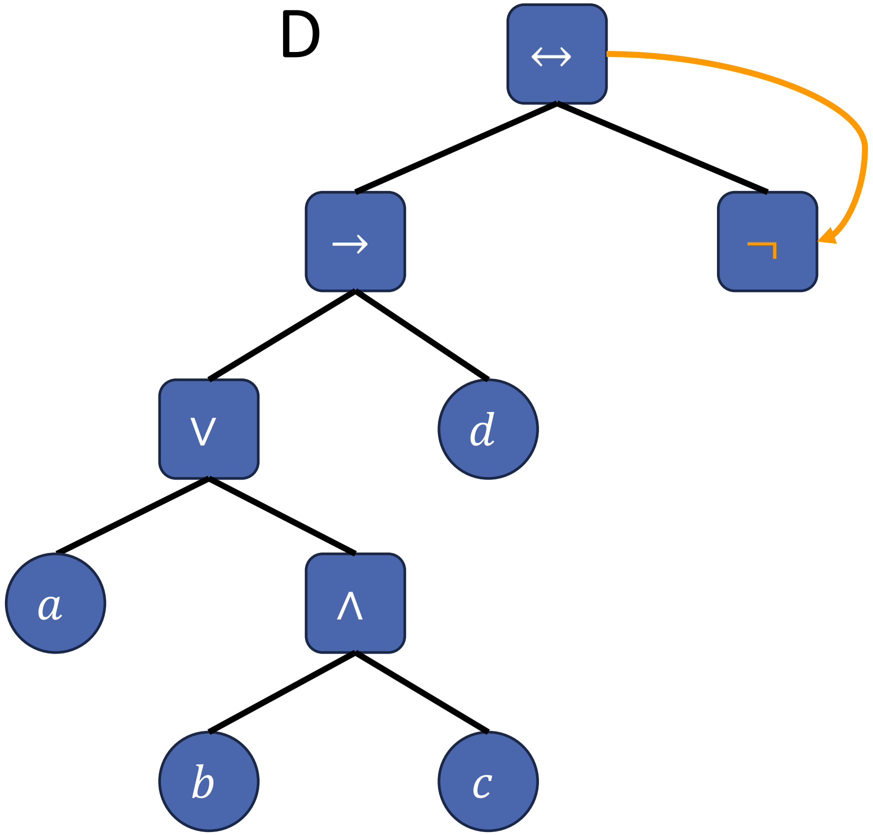


Créer un nœud avec l'opérateur le moins prioritaire à droite et le connecter comme fils droit du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$$\underbrace{((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d)}_{\text{G}} \leftrightarrow \underbrace{(\neg e)}_{\text{D}}$$

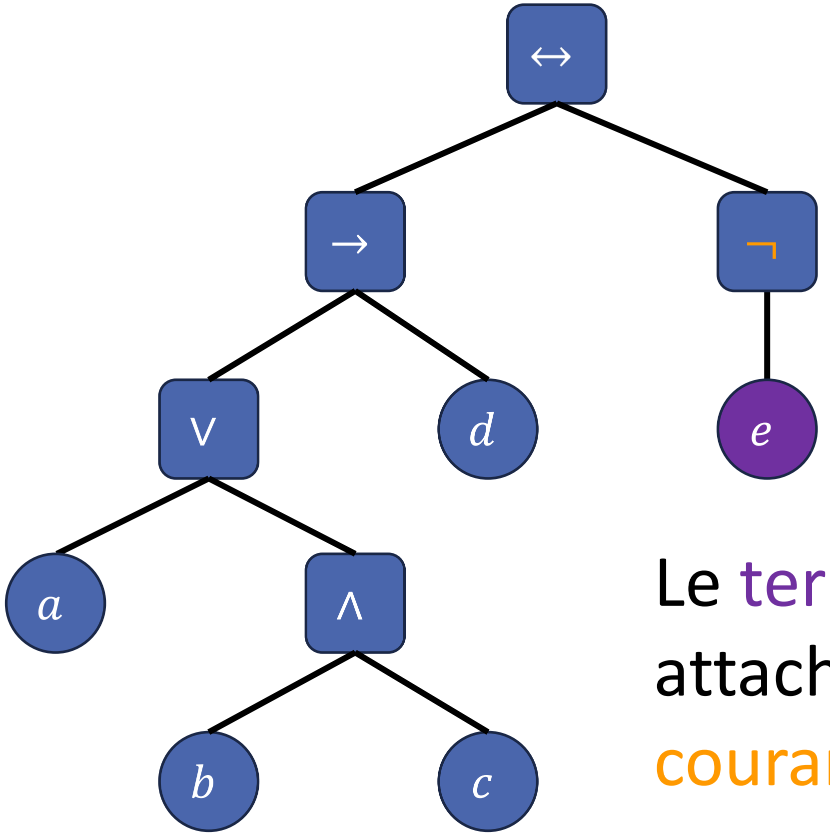


Le nouveau nœud devient le nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$

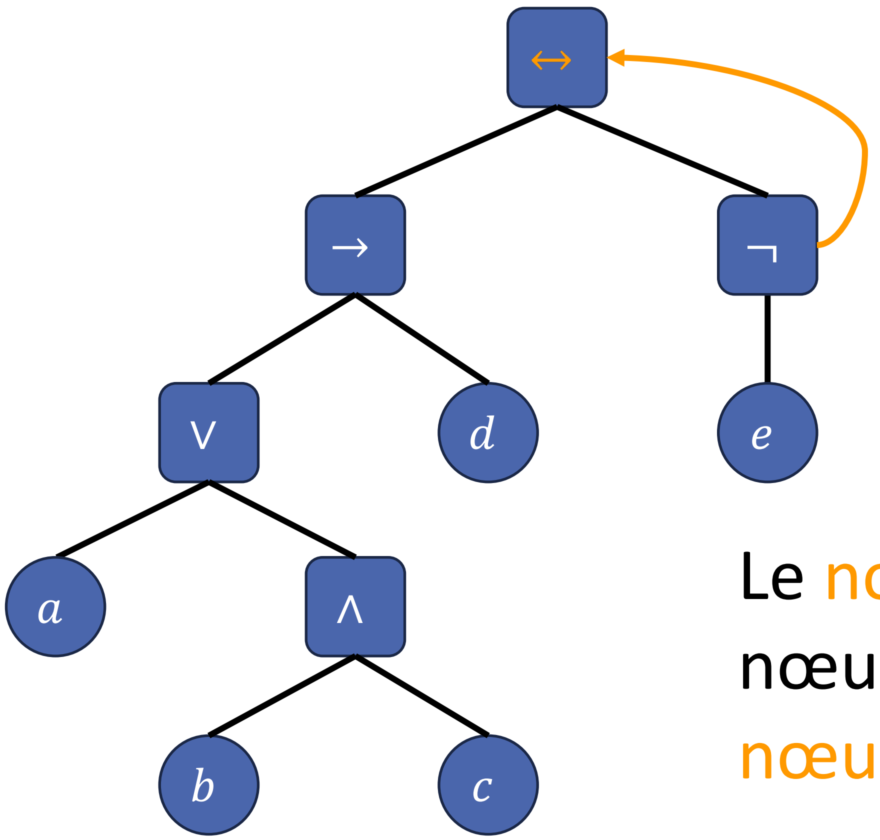


Le terme est une variable, elle est attachée comme feuille du nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$

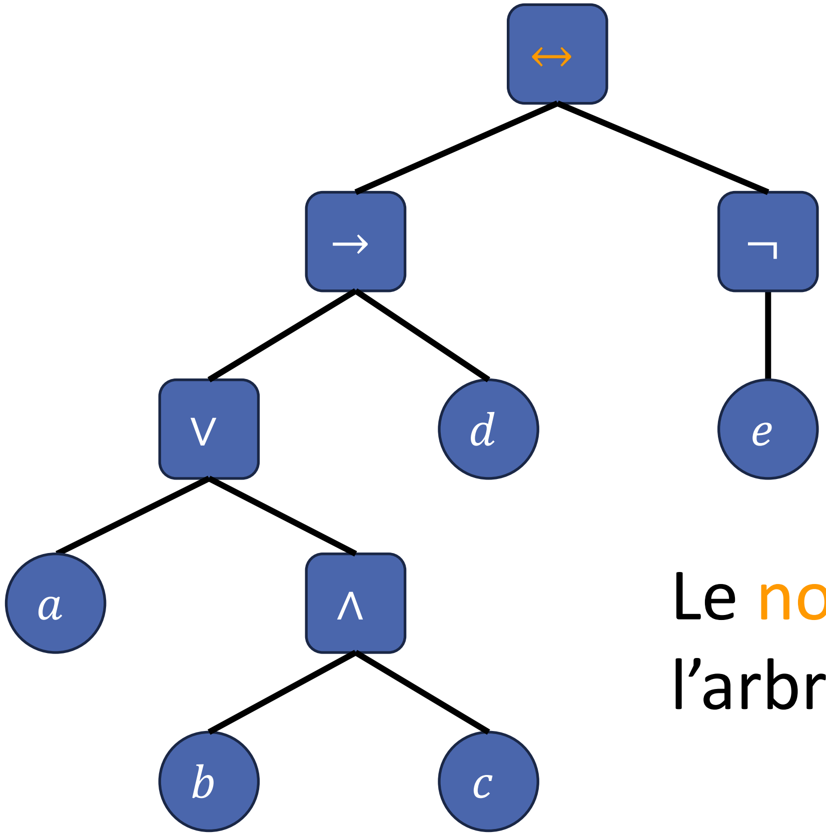


Le nœud courant ayant été traité, le nœud parent devient le nouveau nœud courant

Arbre de formule

- Une formule peut être représentée par un arbre.

$((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$

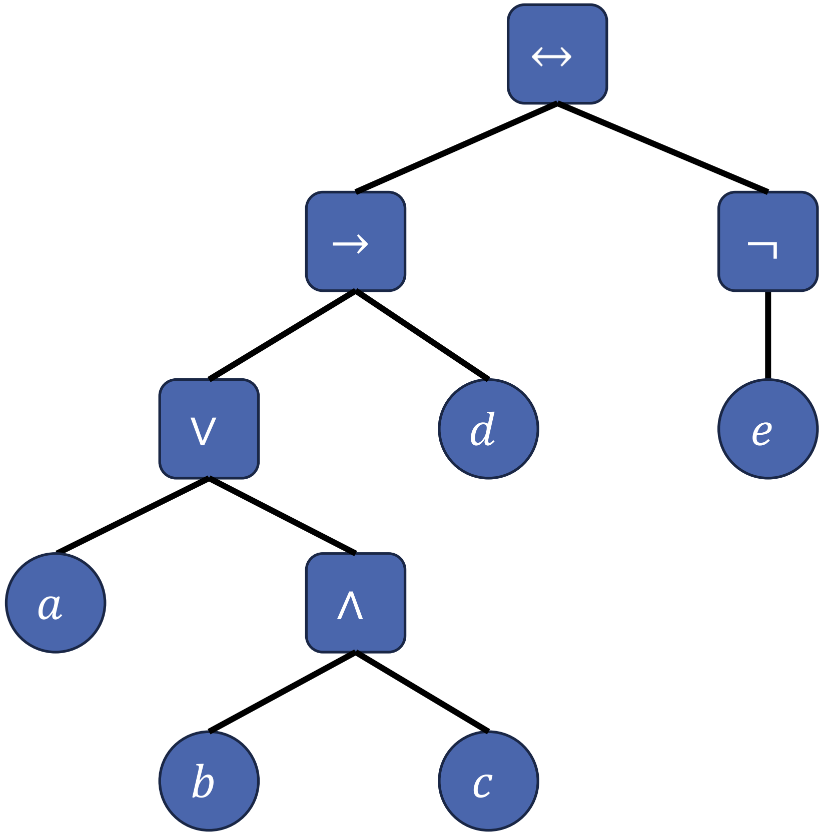


Le nœud racine ayant été traité, l'arbre est construit

Arbre de formule

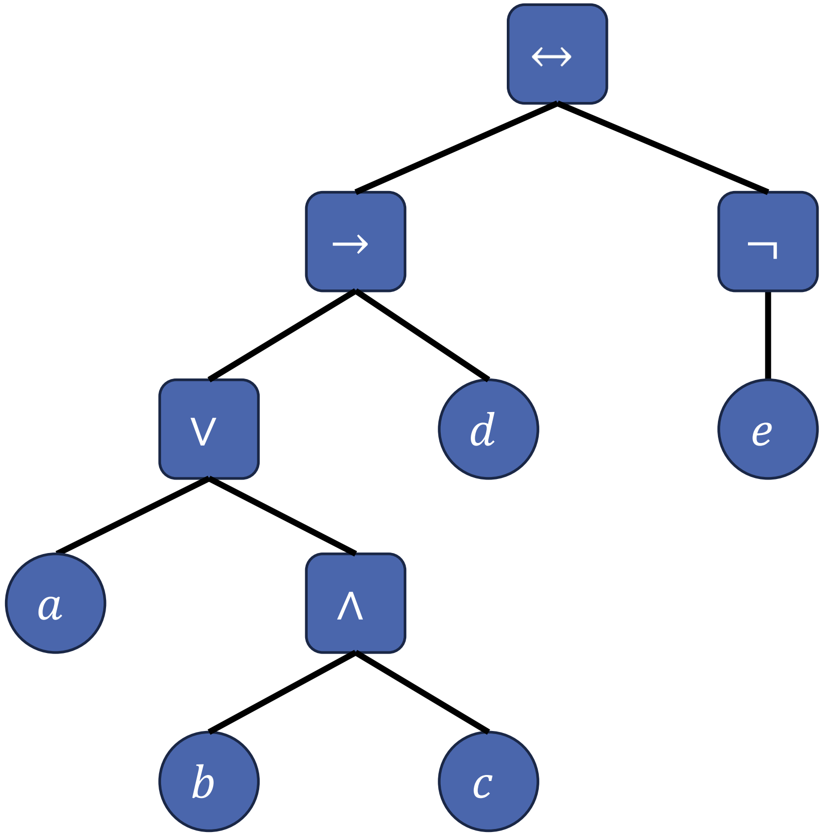
- Une formule peut être représentée par un arbre.

$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e \Longrightarrow ((a \vee (b \wedge c)) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$



Arbre de formule

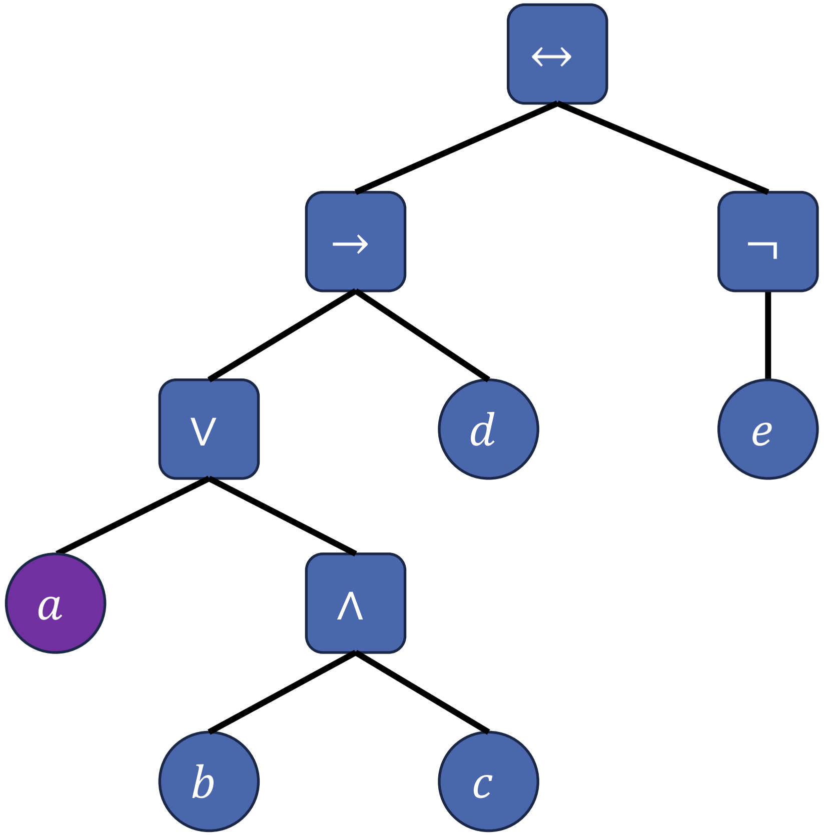
- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

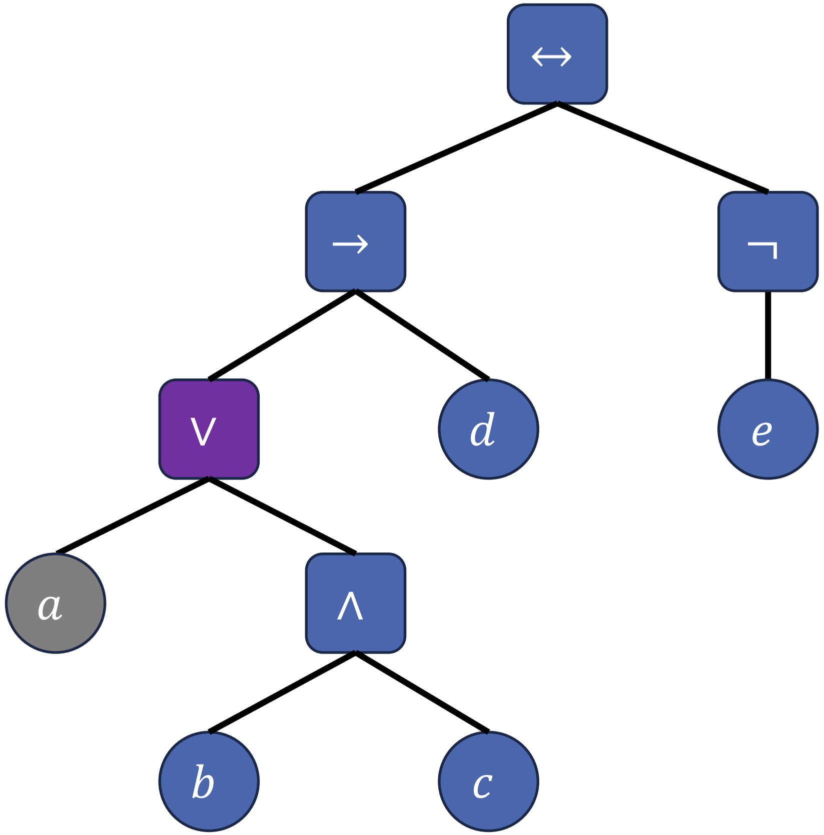
$(a$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

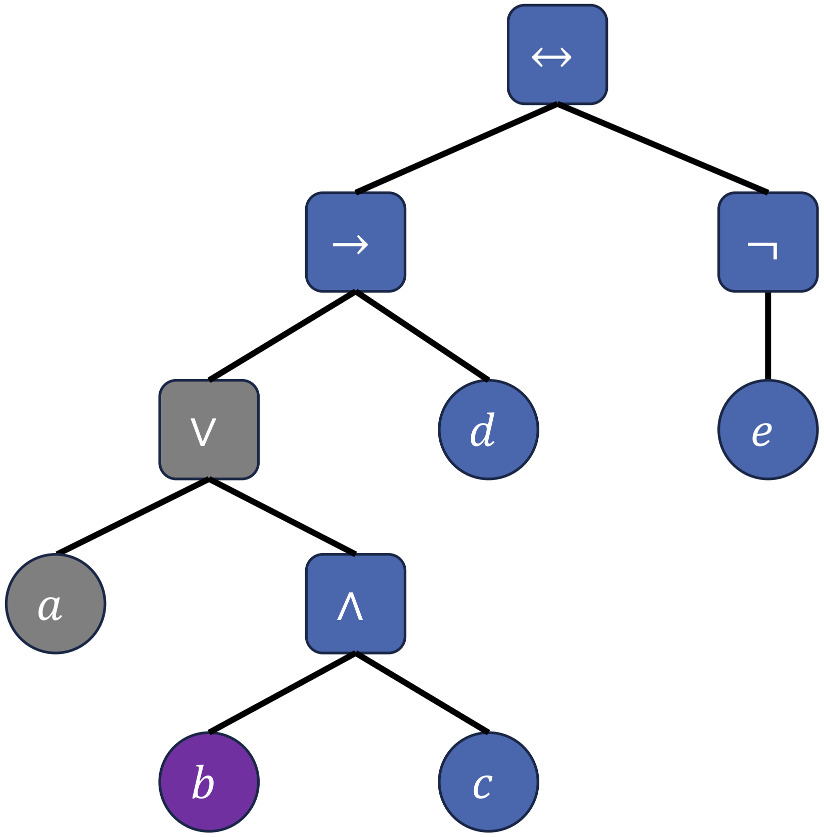
$(a \vee$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

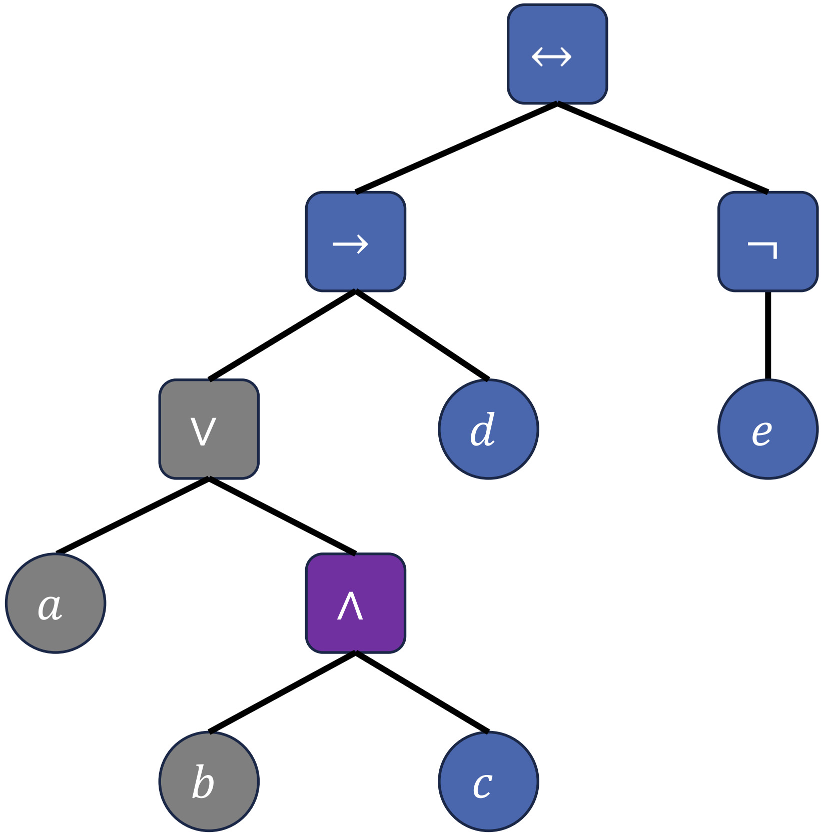
$(a \vee (b$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

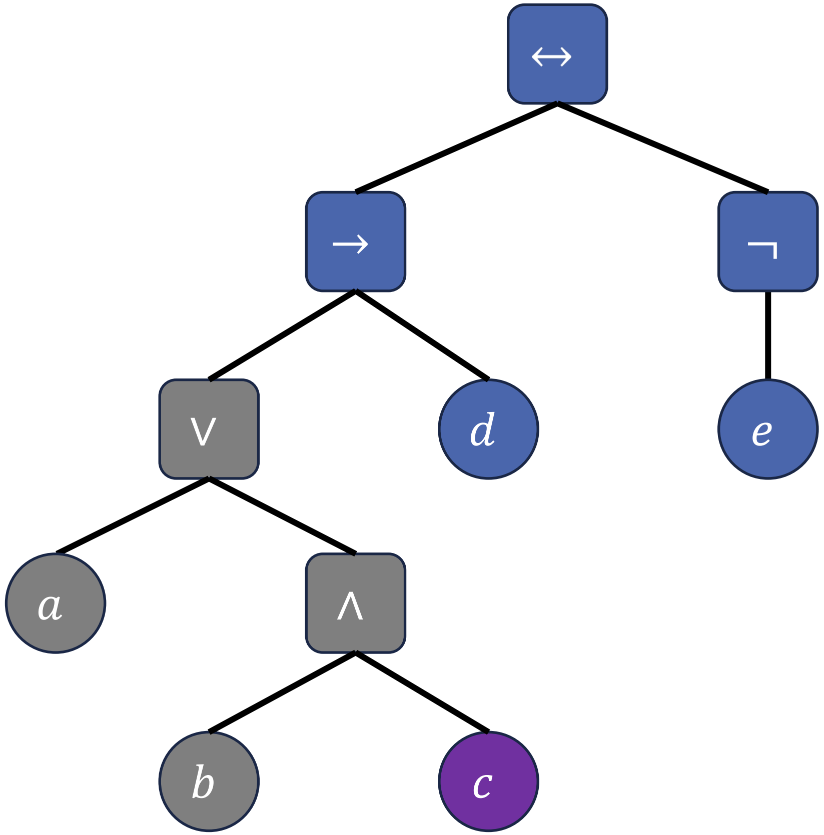
$((a \vee b \wedge$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

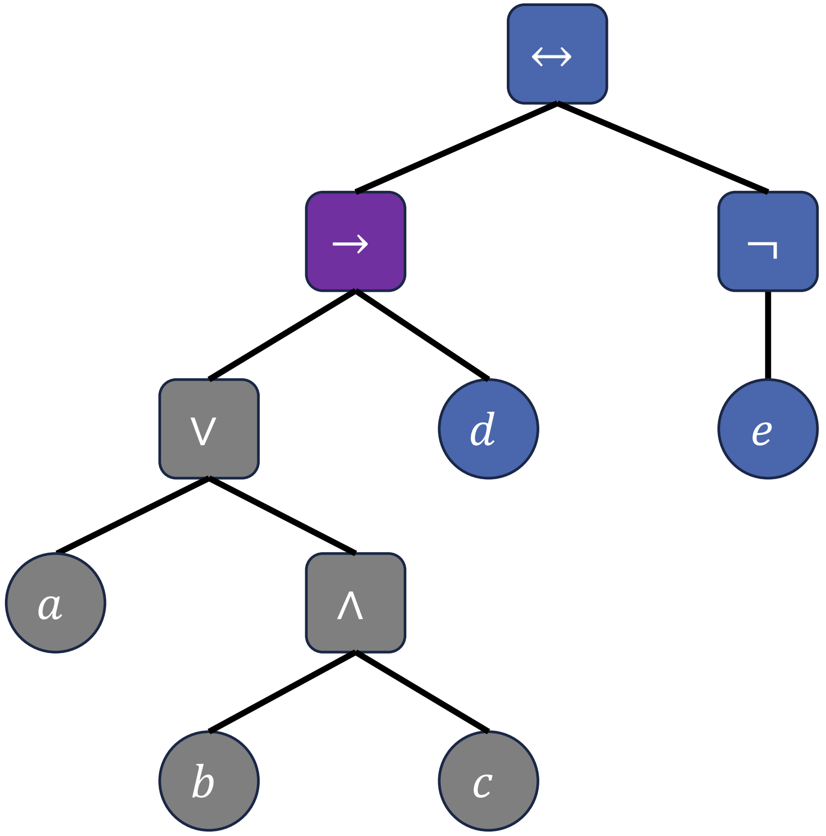
$((a \lor b \land c)$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

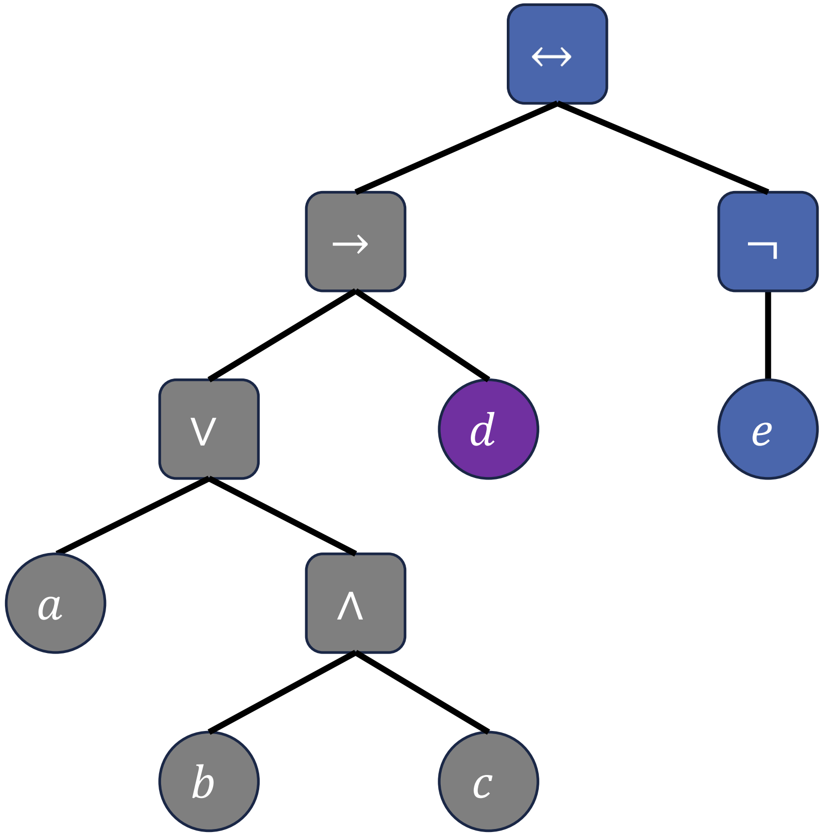
$((a \vee b \wedge c) \rightarrow$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l’arbre permet de recréer la formule

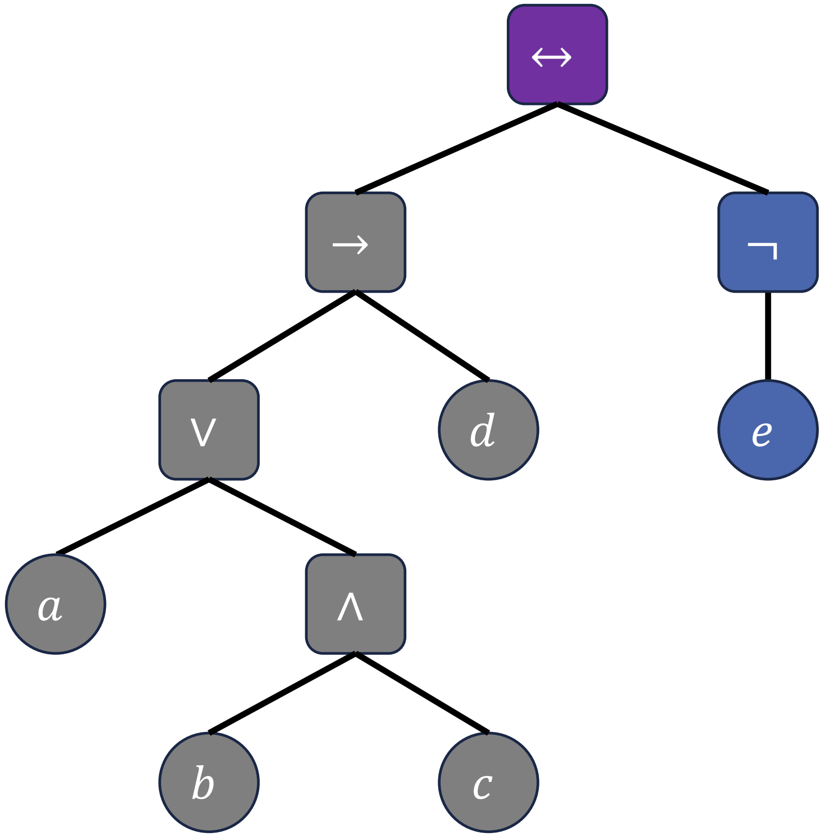
$((a \lor b \land c) \to d)$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

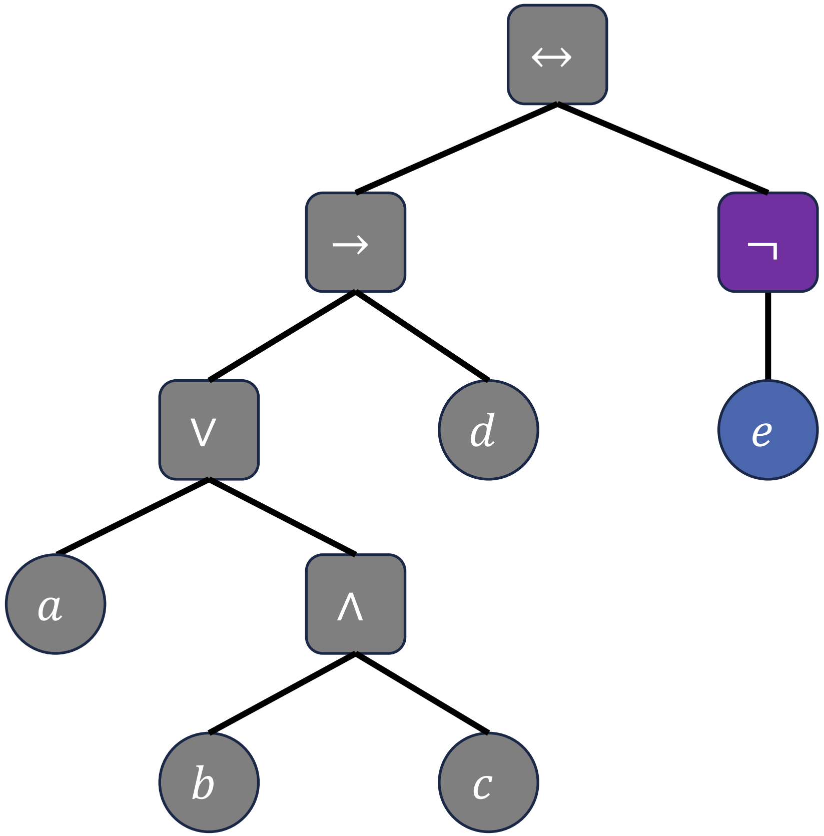
$((a \lor b \land c) \to d) \leftrightarrow$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

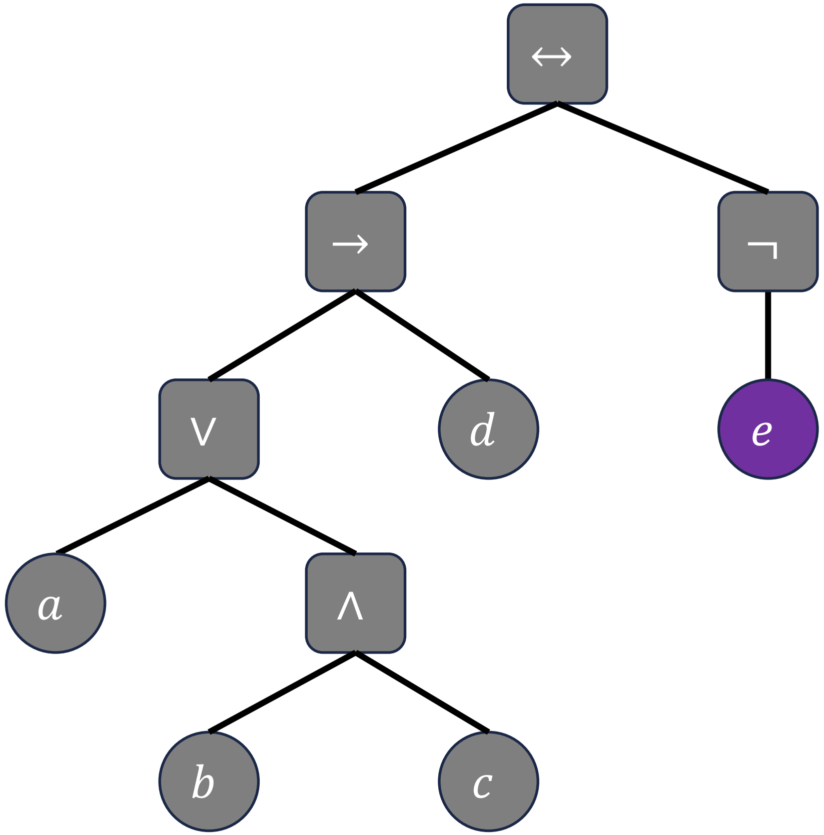
$((a \vee b \wedge c) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

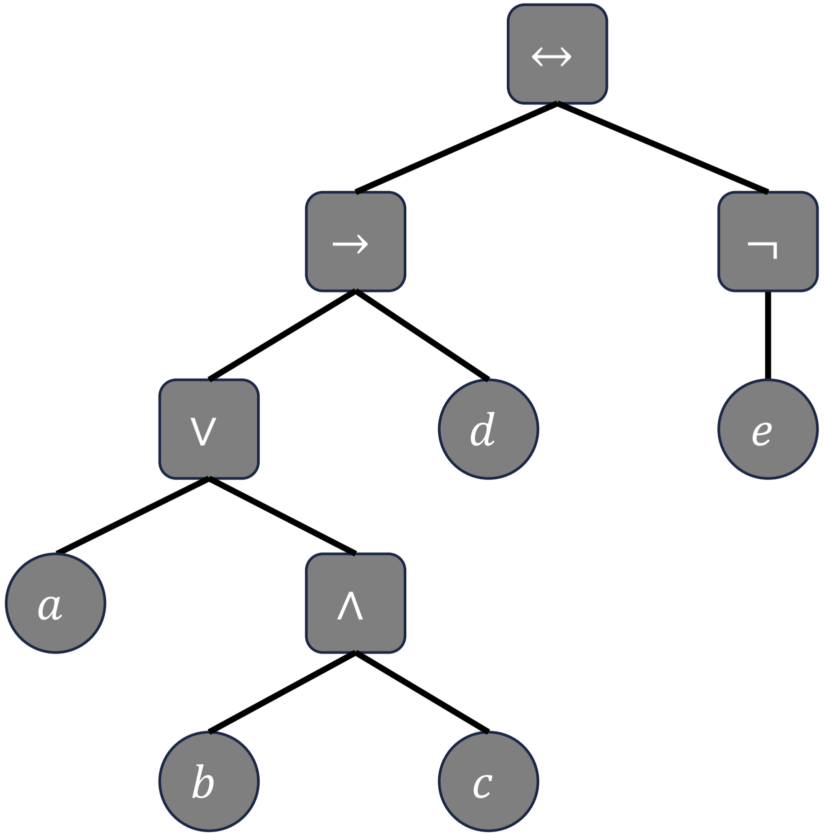
$$((a \vee b \wedge c) \rightarrow d) \leftrightarrow (\neg e)$$



Arbre de formule

- Le parcours préfixé de l'arbre permet de recréer la formule

$((a \lor b \land c) \to d) \leftrightarrow (\neg e)$



Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  *« S'**il** ne **pleut** pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »*

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles

a: **Il pleut**

Il est recommandé que les variables propositionnelles **ne comportent pas de négations** (on parle de variable positive)

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  *« S'il ne pleut pas et qu'**il fait plus de 30°** alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »*

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles

a: Il pleut
b: **Il fait plus de 30°**

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  *« S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors **nous allons à la plage** ou à la piscine en prenant nos maillots »*

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles

a: Il pleut
b: Il fait plus de 30°
c: **Nous allons à la plage**

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  *« S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors **nous allons** à la plage ou **à la piscine** en prenant nos maillots »*

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles

a: Il pleut
b: Il fait plus de 30°
c: Nous allons à la plage
d: **Nous allons à la piscine**

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  *« S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine **en prenant nos maillots** »*

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles

a: Il pleut
b: Il fait plus de 30°
c: Nous allons à la plage
d: Nous allons à la piscine
e: **Nous avons nos maillots**

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles
  - Créer une formule à partir des opérateurs logiques et des symboles

    a: Il pleut
    b: Il fait plus de 30°
    c: Nous allons à la plage
    d: Nous allons à la piscine
    e: Nous avons nos maillots

$$\neg a$$

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles
  - Créer une formule à partir des opérateurs logiques et des symboles

    a: Il pleut
    b: Il fait plus de 30°
    c: Nous allons à la plage
    d: Nous allons à la piscine
    e: Nous avons nos maillots

    $\neg a \wedge b$

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « *S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots* »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles
  - Créer une formule à partir des opérateurs logiques et des symboles

    a: Il pleut
    b: Il fait plus de 30°
    c: Nous allons à la plage
    d: Nous allons à la piscine
    e: Nous avons nos maillots

    $\neg a \land b \rightarrow$

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles
  - Créer une formule à partir des opérateurs logiques et des symboles

    a: Il pleut
    b: Il fait plus de 30°
    c: Nous allons à la plage
    d: Nous allons à la piscine
    e: Nous avons nos maillots

    $$\neg a \land b \rightarrow c \lor d$$

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles
  - Créer une formule à partir des opérateurs logiques et des symboles

    a: Il pleut
    b: Il fait plus de 30°
    c: Nous allons à la plage
    d: Nous allons à la piscine
    e: Nous avons nos maillots

    $$\neg a \wedge b \rightarrow c \vee d \wedge e$$

Formalisation

- La logique propositionnelle permet de **formaliser** des assertions

  « S'il ne pleut pas et qu'il fait plus de 30° alors nous allons à la plage ou à la piscine en prenant nos maillots »

- Méthode:
  - Représenter les faits par des variables propositionnelles
  - Créer une formule à partir des opérateurs logiques et des symboles

a: Il pleut
b: Il fait plus de 30°
c: Nous allons à la plage
d: Nous allons à la piscine
e: Nous avons nos maillots

$$\neg a \land b \rightarrow (c \lor d) \land e$$

Le maillot est pris dans les 2 cas

Conclusion

- La logique propositionnelle propose un **cadre syntaxique** permettant de représenter des assertions.
- Ce cadre formalise la façon d'**écrire** et de **lire** des **formules** grâce aux notions de
  - Variables propositionnelles
  - Connecteurs logiques
- Toute assertion booléenne (vrai ou faux) peut être représentée par une formule propositionnelle (stricte ou non)

Comment donner un sens aux formules ?