Intelligence Artificielle

Logique Propositionnelle

Sémantique et formes normales

Julien SEINTURIER
Maître de Conférences

Introduction

- Sémantique
  - Étude du **sens** des unités linguistiques et de leurs combinaisons.

Introduction

- Sémantique
  - Étude du **sens** des unités linguistiques et de leurs combinaisons.
  - Aspect de la **logique** qui traite de **l'interprétation** et de la **signification** des systèmes formels. (*Larousse*)

Introduction

- Sémantique
  - Étude du **sens** des unités linguistiques et de leurs combinaisons.
  - Aspect de la **logique** qui traite de **l'interprétation** et de la **signification** des systèmes formels. (*Larousse*)
- Syntaxe et Sémantique en Logique propositionnelle

$$F:\ (\neg a \vee b) \wedge c \rightarrow d$$

Introduction

- Sémantique
  - Étude du **sens** des unités linguistiques et de leurs combinaisons.
  - Aspect de la **logique** qui traite de **l'interprétation** et de la **signification** des systèmes formels. (*Larousse*)

- Syntaxe et Sémantique en Logique propositionnelle

$$F:\ (\neg a \vee b) \wedge c \rightarrow d$$

Syntaxe $\left\{ \text{Formule Stricte, Priorités} \right.$

Ecriture

Introduction

- Sémantique
  - Étude du **sens** des unités linguistiques et de leurs combinaisons.
  - Aspect de la **logique** qui traite de **l'interprétation** et de la **signification** des systèmes formels. (*Larousse*)

- Syntaxe et Sémantique en Logique propositionnelle

$$F\colon (\neg a \vee b) \wedge c \rightarrow d$$

Syntaxe { Formule Stricte, Priorités

Valeur (Vrai ou fausse) } **Sémantique**

Ecriture **Interprétation**

Donner un sens

- Interpréter
  - Interpréter une formule logique c'est lui **attribuer** la **valeur** *Vraie* ou la valeur *Fausse*

Donner un sens

- Interpréter
  - Interpréter une formule logique c'est lui **attribuer** la **valeur** $Vraie$ ou la valeur $Fausse$
  - L'**interprétation** se fait toujours dans un **contexte défini**

Donner un sens

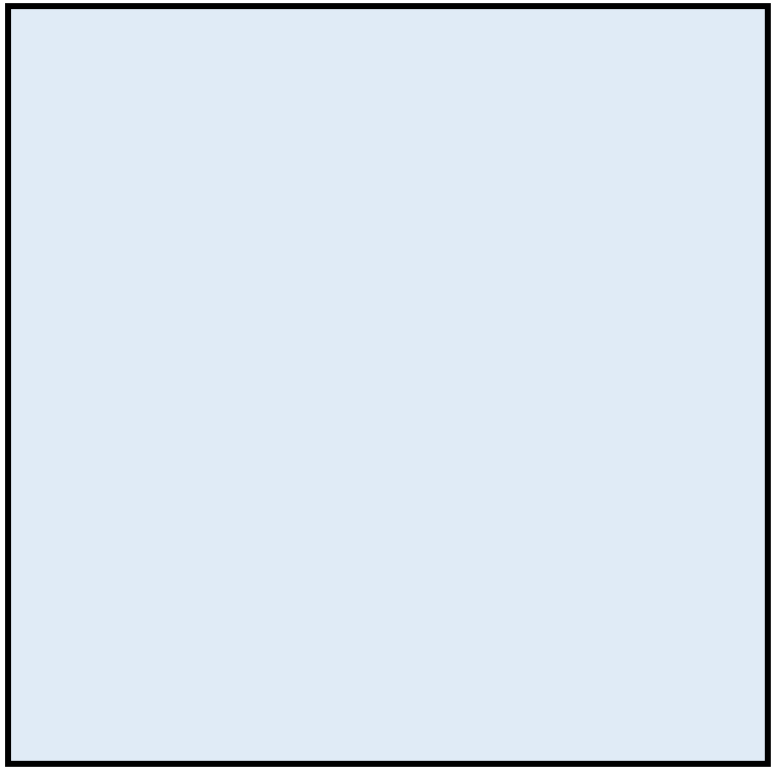
- Interpréter
  - Interpréter une formule logique c'est lui **attribuer** la **valeur** *Vraie* ou la valeur *Fausse*
  - L'**interprétation** se fait toujours dans un **contexte défini**
- Formaliser
  - L'**interprétation** d'une formule suit des règles
  - Eviter l'ambiguïté ou le non-déterminisme

Vision ensembliste

- Monde clos

Vision ensembliste

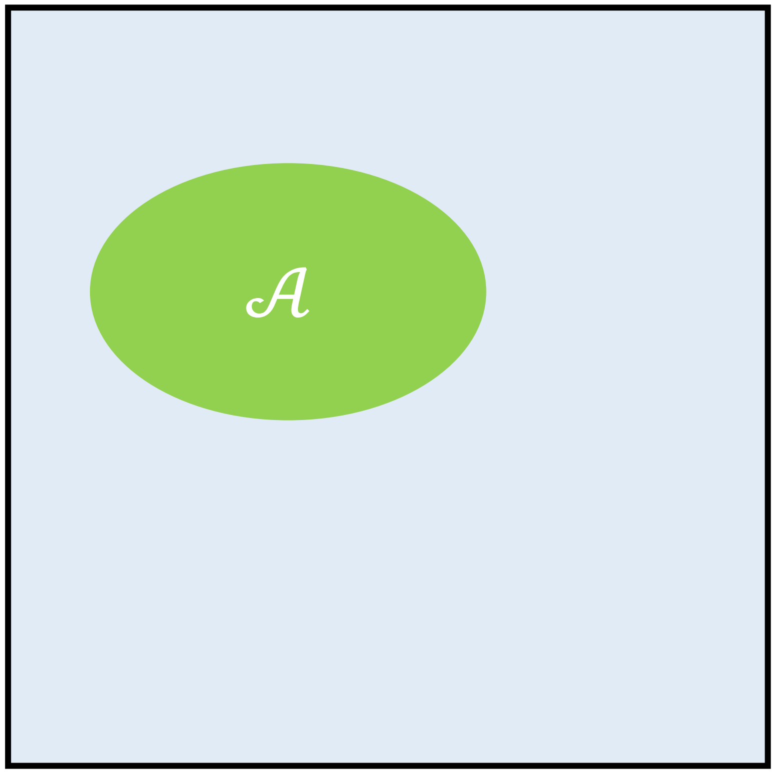
- Monde clos
  - Soit un **ensemble fini** d'éléments, noté $\mathcal{W}$



Vision ensembliste

- Monde clos
  - Soit un **ensemble fini** d'éléments, noté $\mathcal{W}$
  - Toute proposition a peut être vue comme un sous-ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ définit par:

$$\mathcal{A} = \{e \in \mathcal{W} \mid e \text{ vérifie } a\}$$



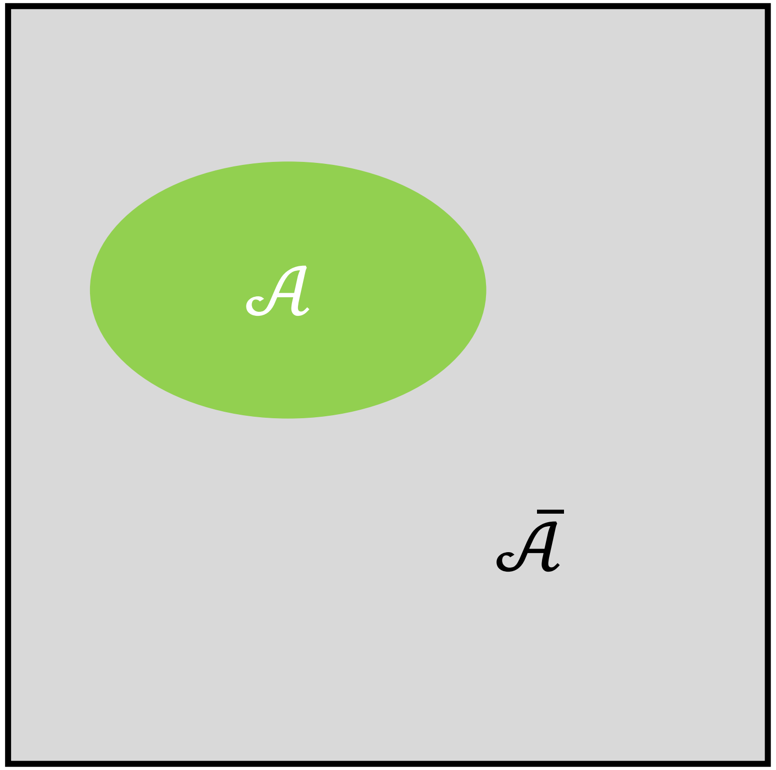
Vision ensembliste

- Monde clos
  - Soit un **ensemble fini** d'éléments, noté $\mathcal{W}$
  - Toute proposition a peut être vue comme un sous-ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$ définit par:

$$\mathcal{A} = \{e \in \mathcal{W} \mid e \text{ vérifie } a\}$$

  - Réciproquement, l'ensemble contenant les éléments issus de $\mathcal{W}$ qui rendent a fausse, noté $\bar{\mathcal{A}}$, est définit par:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{e \in \mathcal{W} \mid e \text{ ne vérifie pas } a\}$$



Vision ensembliste

- Propriétés
  - Tout élément de $\mathcal{W}$ ne peut à la fois vérifier α et ne pas la vérifier:

$$\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} = \emptyset$$

Vision ensembliste

- Propriétés
  - Tout élément de $\mathcal{W}$ ne peut à la fois vérifier a et ne pas la vérifier:

$$\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} = \emptyset$$

  - Tout élément de $\mathcal{W}$ ne peut satisfaire exclusivement qu'une seule de ces conditions:
    - e vérifie a
    - e ne vérifie pas a

$$\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{W}$$

Vision ensembliste

- Propriétés
  - Tout élément de $\mathcal{W}$ ne peut à la fois vérifier a et ne pas la vérifier:

$$\mathcal{A} \cap \bar{\mathcal{A}} = \emptyset$$

  - Tout élément de $\mathcal{W}$ ne peut satisfaire exclusivement qu'une seule de ces conditions:
    - e vérifie a
    - e ne vérifie pas a

$$\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{W}$$

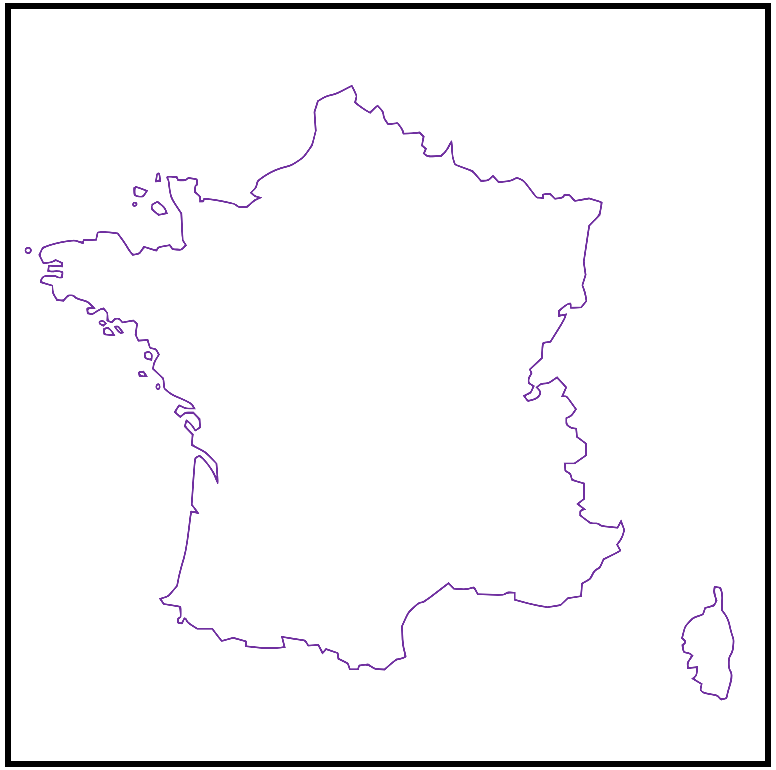
$$\mathcal{A} = \mathcal{W}/\bar{\mathcal{A}} \qquad \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{W}/\mathcal{A}$$

Vision ensembliste

- Proposition
  - Information sur un état de chose pouvant être vraie ou fausse

Vision ensembliste

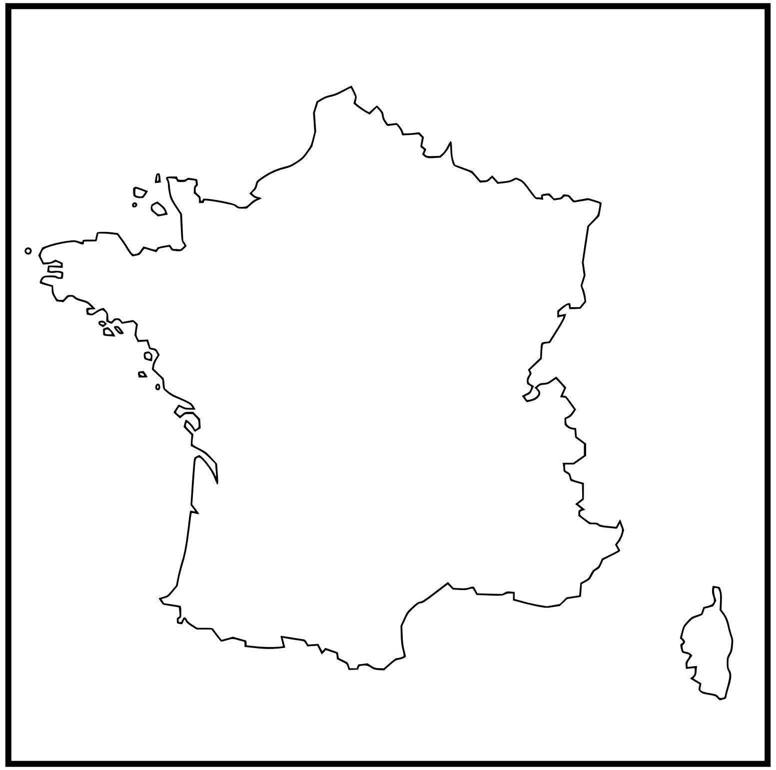
- Proposition
  - Information sur un état de chose pouvant être vraie ou fausse
- Exemple de monde clos
  - Ensemble fini d'éléments:
    Le territoire français à un instant donné



Vision ensembliste

- Proposition
  - Information sur un état de chose pouvant être vraie ou fausse

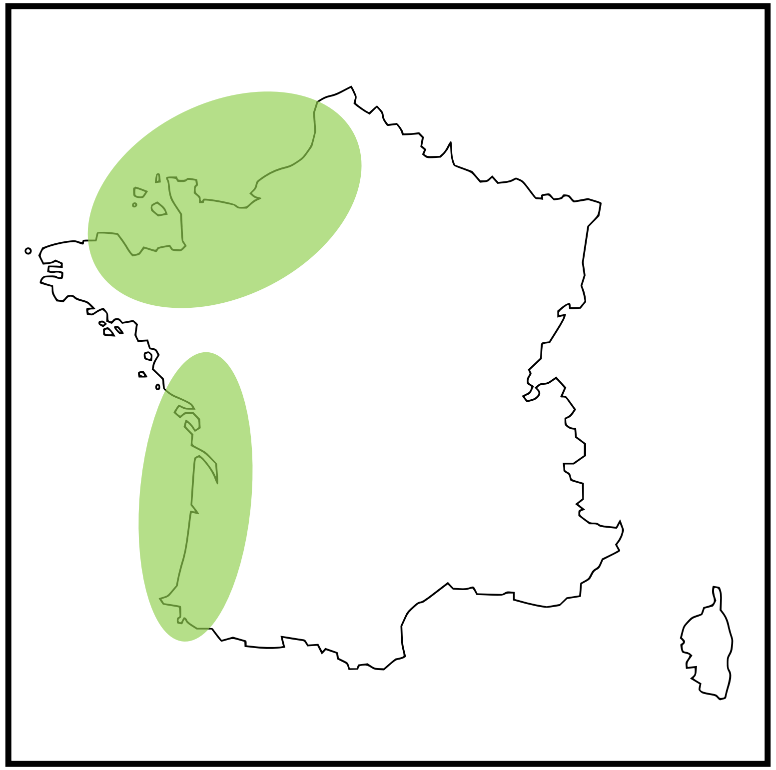
- Exemple de monde clos
  - Ensemble fini d'éléments:
    Le territoire français à un instant donné
  - Proposition: *a: « il pleut »*



Vision ensembliste

- Proposition
  - Information sur un état de chose pouvant être vraie ou fausse

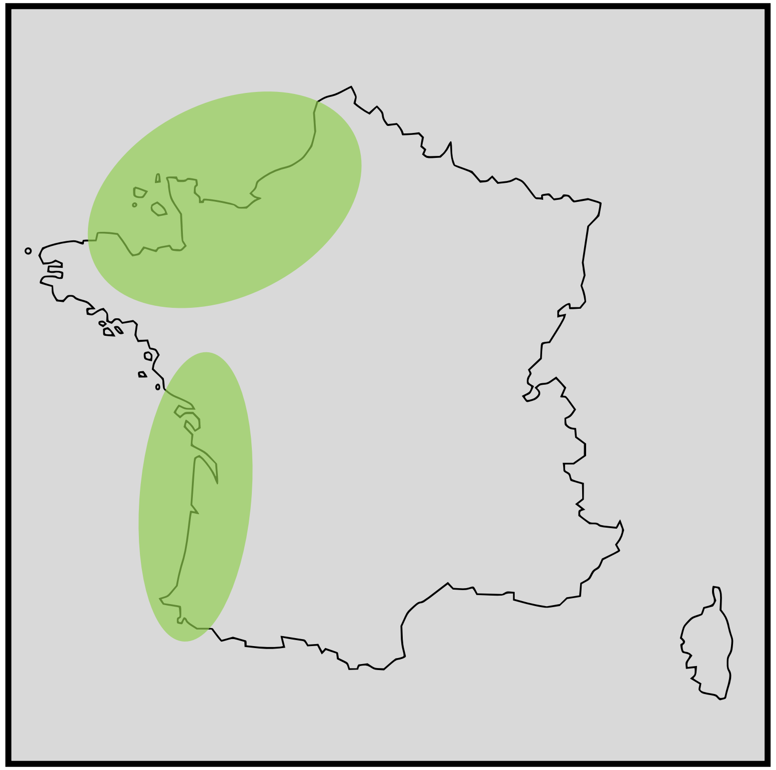
- Exemple de monde clos
  - Ensemble fini d'éléments:
    Le territoire français à un instant donné
  - Proposition: *a: « il pleut »*
  - Partition de l'ensemble:
    - « Il pleut » est vraie



Vision ensembliste

- Proposition
  - Information sur un état de chose pouvant être vraie ou fausse

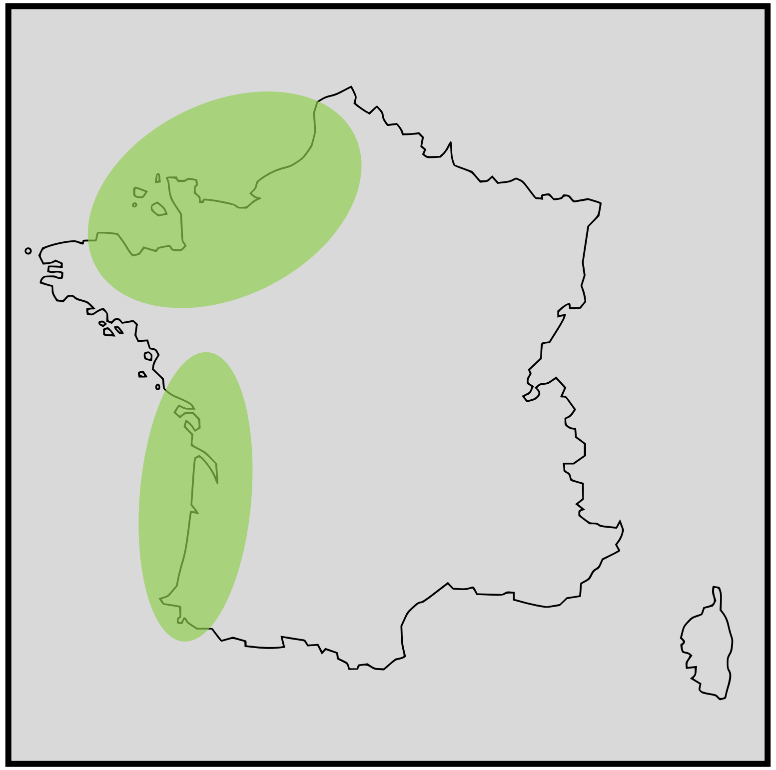
- Exemple de monde clos
  - Ensemble fini d'éléments:
    Le territoire français à un instant donné
  - Proposition: a: *« il pleut »*
  - Partition de l'ensemble:
    - « Il pleut » est vraie
    - « Il pleut » est fausse



Vision ensembliste

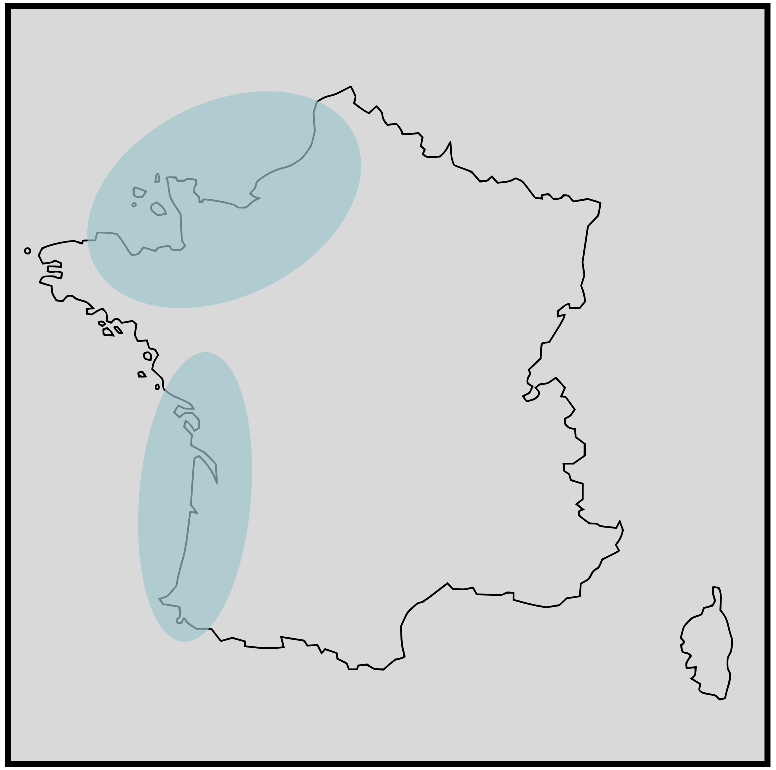
- Proposition
  - Information sur un état de chose pouvant être vraie ou fausse
- Exemple de monde clos
  - Ensemble fini d'éléments:
    Le territoire français à un instant donné
  - Proposition: a: « *il pleut* »
  - Equivalence ensembliste

$$a \equiv \{e \in \mathcal{W} \mid \text{« Il pleut » est vraie}\} = \mathcal{A}$$
$$\neg a \equiv \{e \in \mathcal{W} \mid \text{« Il pleut » est fausse}\} = \bar{\mathcal{A}}$$



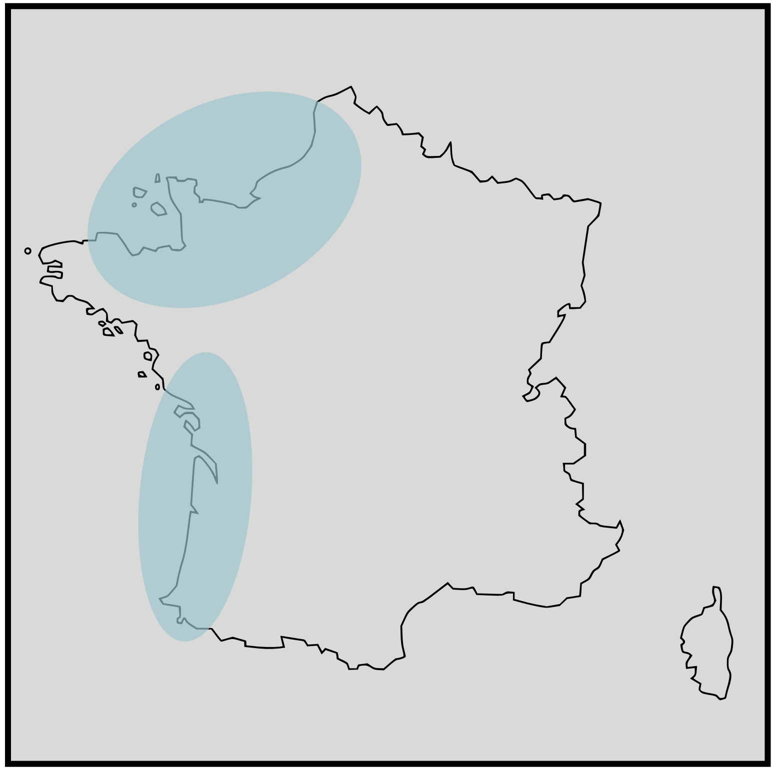
Vision ensembliste

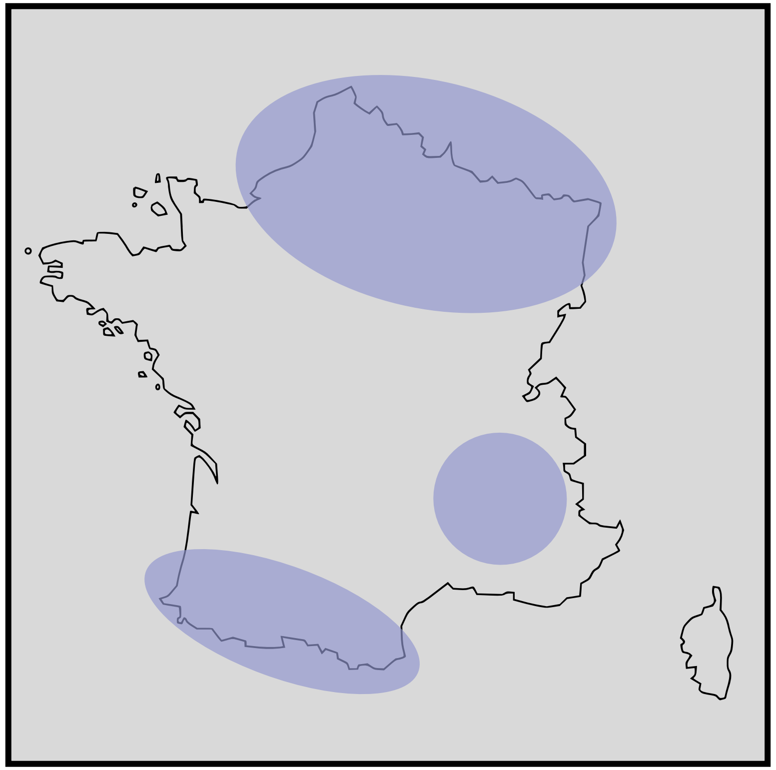
- Propositions multiples
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$



Vision ensembliste

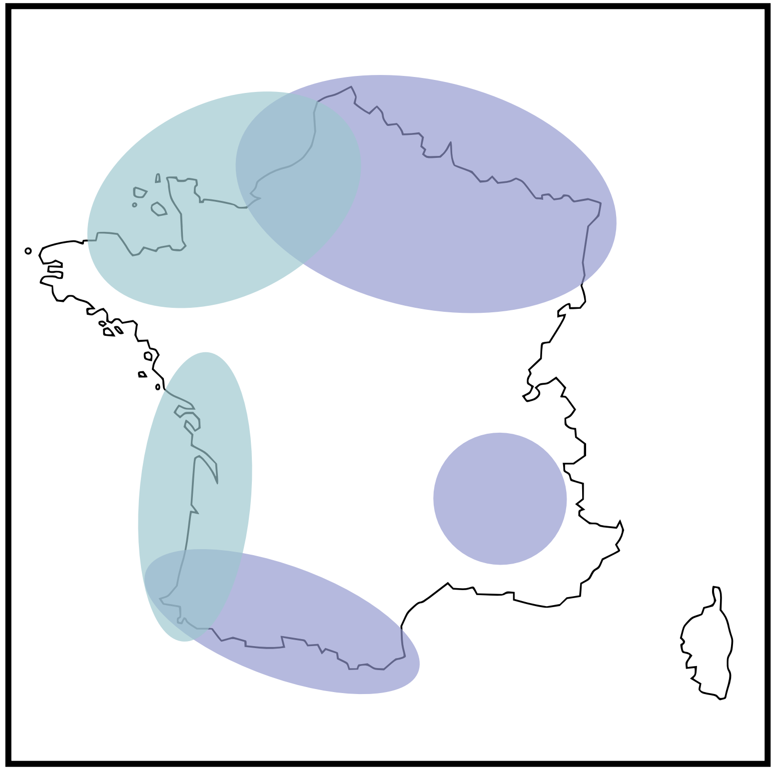
- Propositions multiples
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$





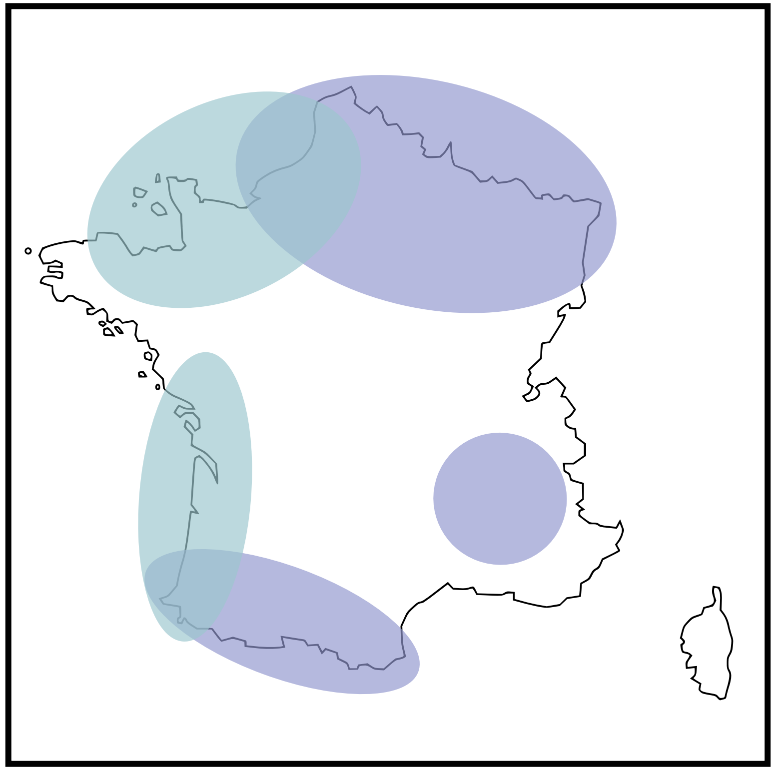
Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$



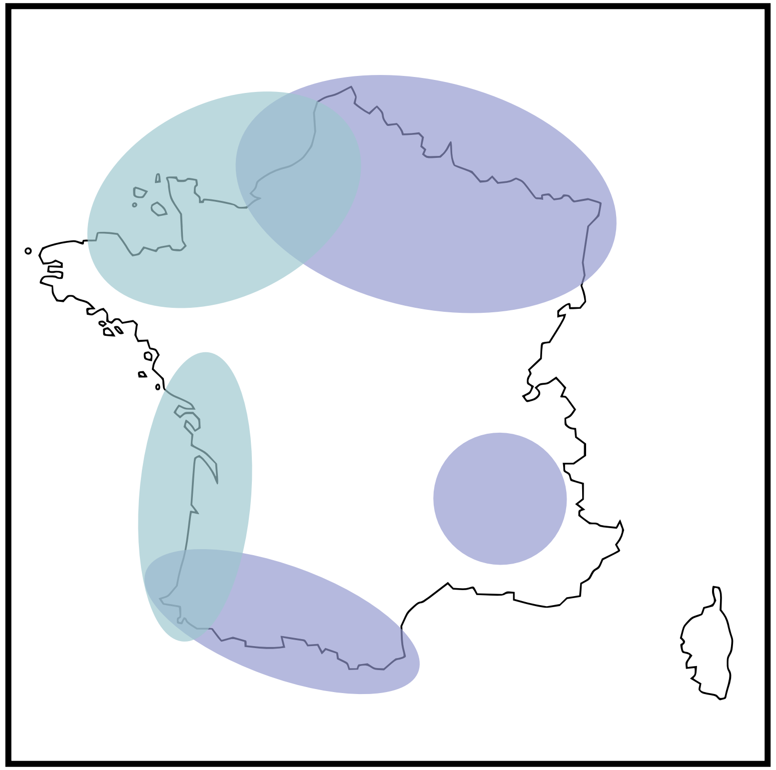
Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: *« il pleut »* $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: *« il fait froid»* $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - *« il pleut »* et *« il fait froid »*



Vision ensembliste

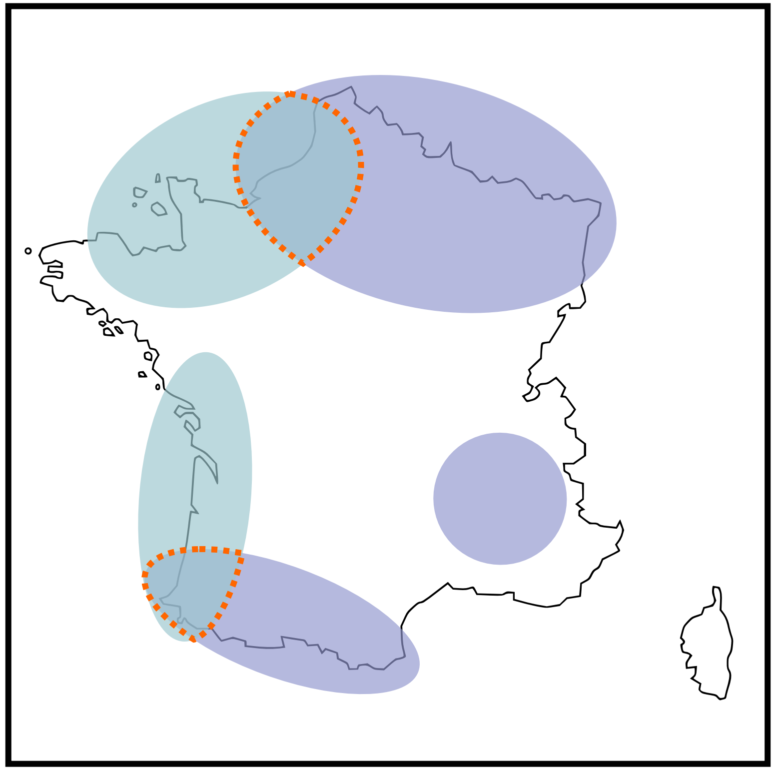
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » et « *il fait froid* »: $a \wedge b$



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » et « *il fait froid* »: $a \wedge b$

Confirmé à tous les endroits ou a et b sont vraies

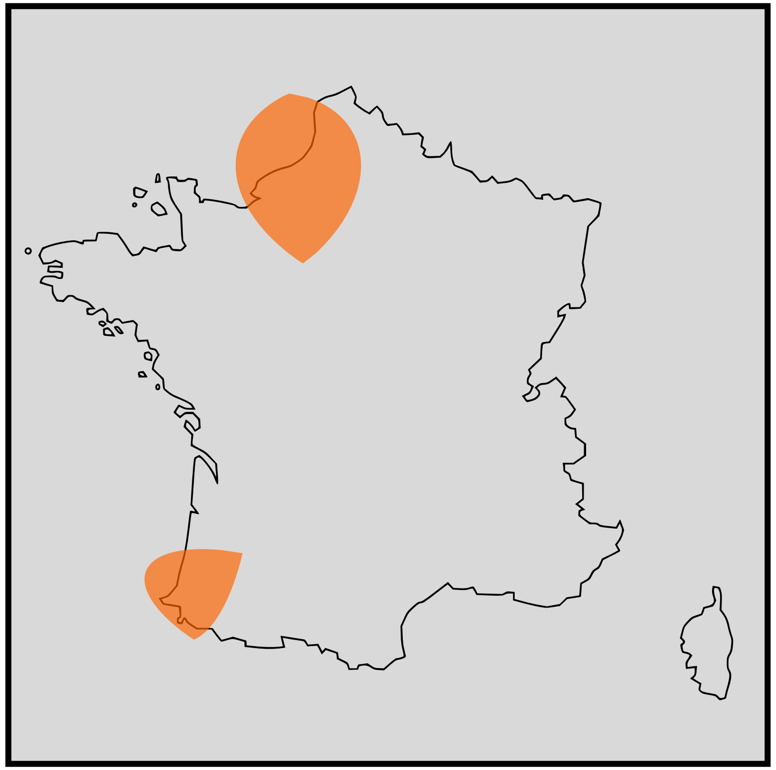


Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » et « *il fait froid* »: $a \wedge b$

Confirmé à tous les endroits ou a et b sont vraies

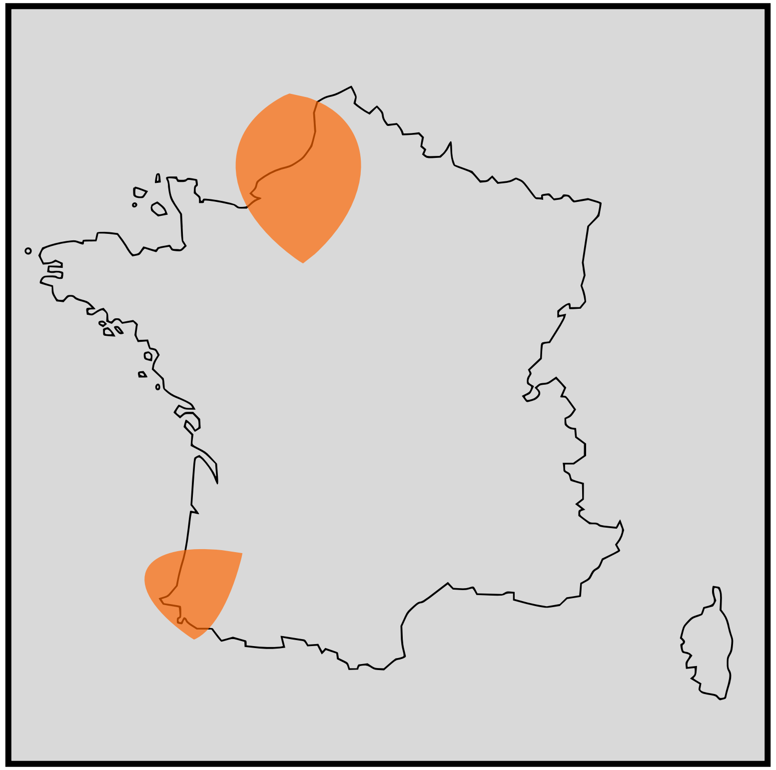
Infirmé partout ailleurs



Vision ensembliste

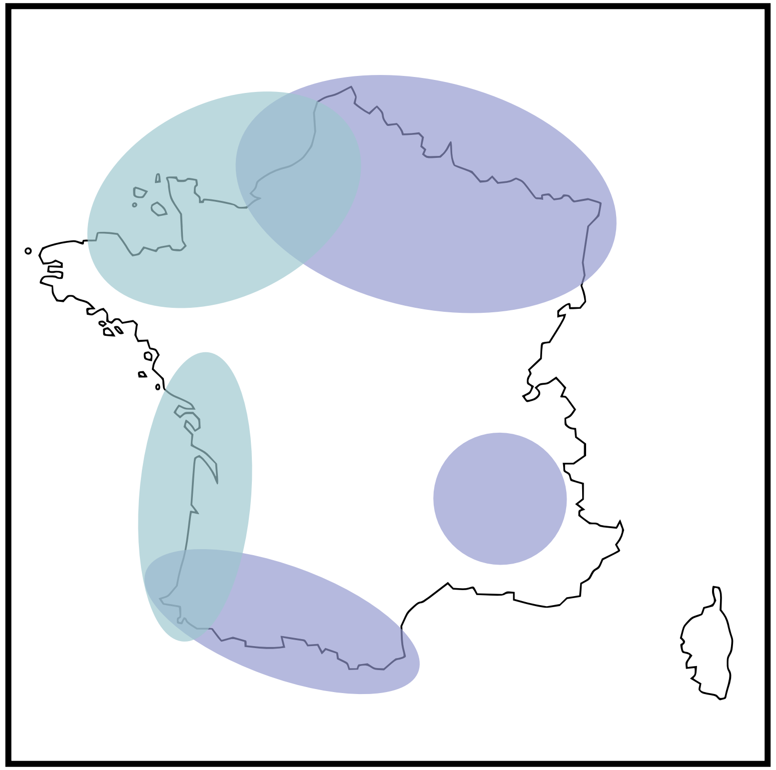
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » et « *il fait froid* »: $a \wedge b$

$$a \wedge b \equiv \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$



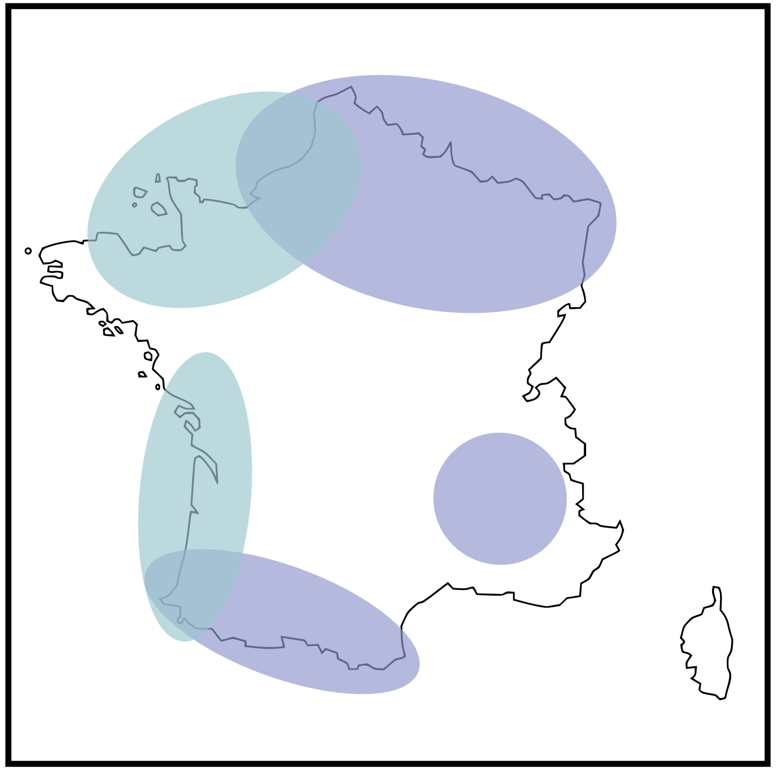
Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: *« il pleut »* $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: *« il fait froid»* $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - *« il pleut »* ou *« il fait froid »*



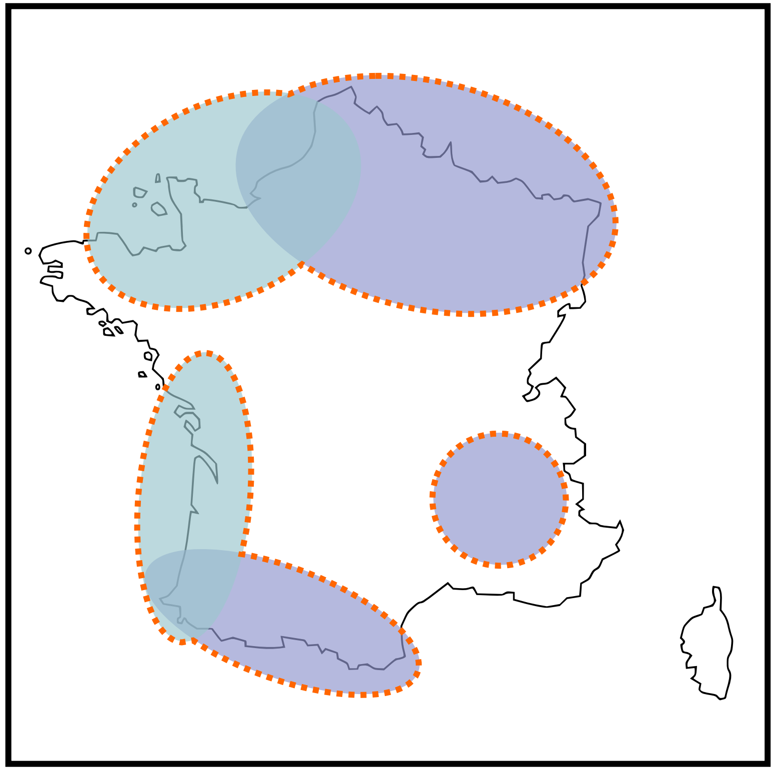
Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: *« il pleut »* $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: *« il fait froid»* $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - *« il pleut »* ou *« il fait froid »*: $a \vee b$



Vision ensembliste

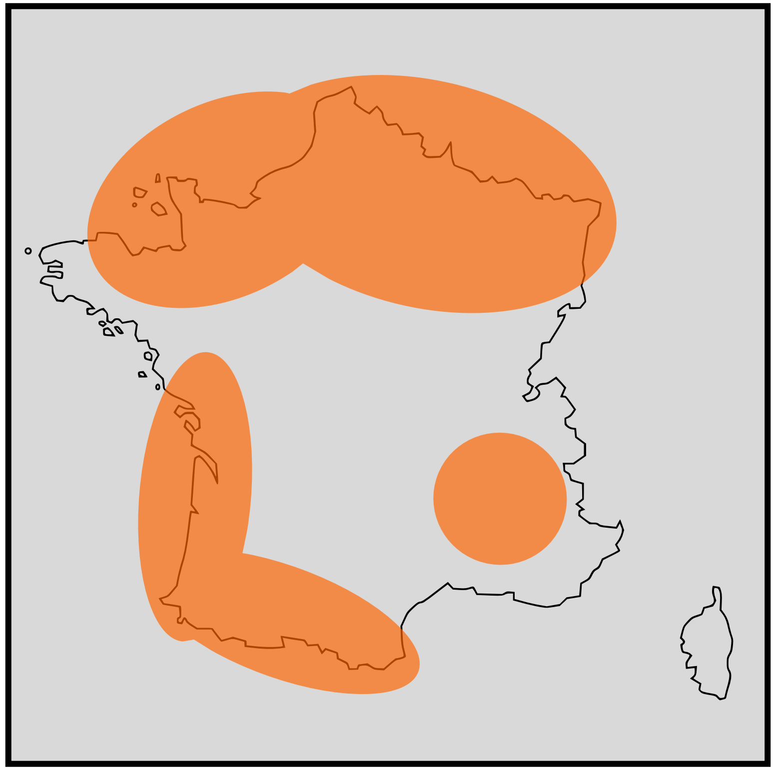
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: *« il pleut »* $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: *« il fait froid»* $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - *« il pleut »* ou *« il fait froid »*: $a \vee b$



Confirmé à tous les endroits qui vérifient a ainsi qu'à tous ceux qui vérifient b

Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » ou « *il fait froid* »: $a \vee b$



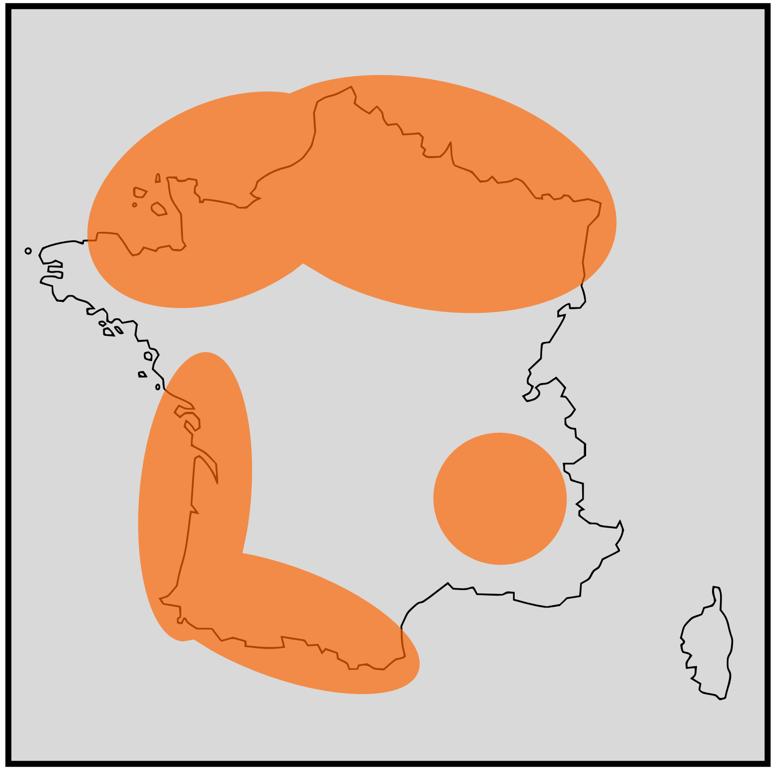
Confirmé à tous les endroits qui vérifient a ainsi qu'à tous ceux qui vérifient b

Infirmé partout ailleurs

Vision ensembliste

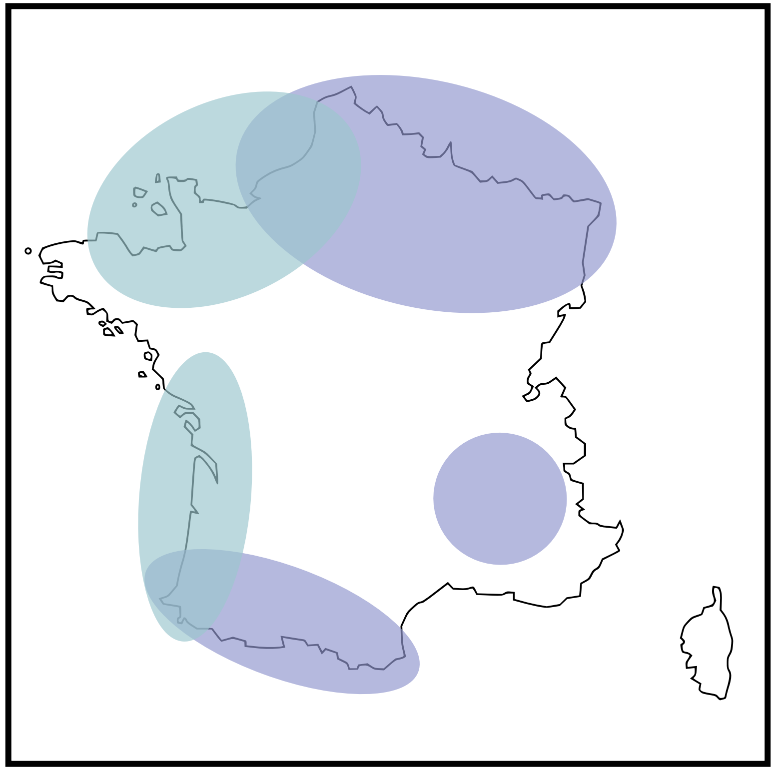
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » ou « *il fait froid* »: $a \vee b$

$$a \vee b \equiv \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$



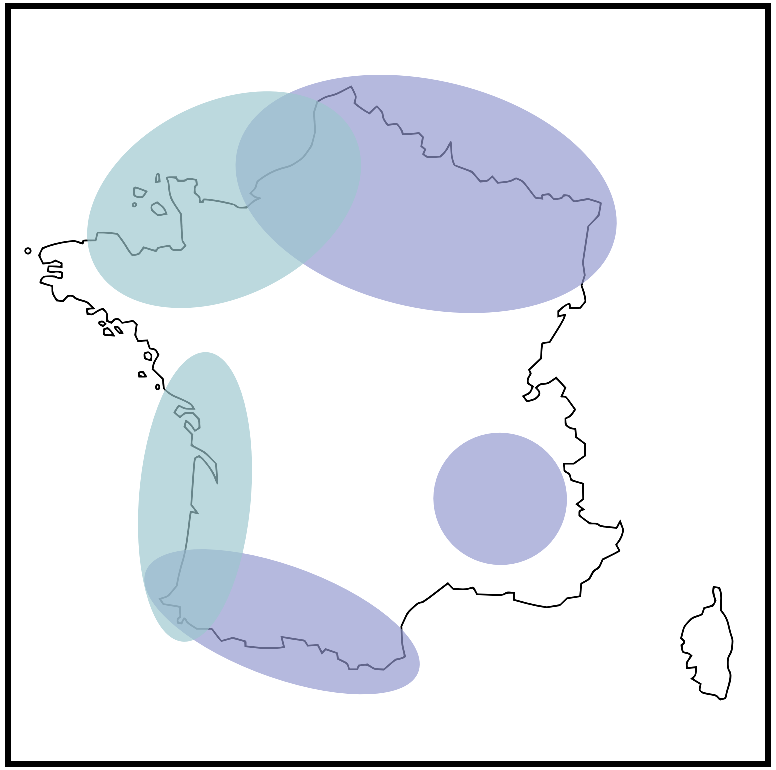
Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »



Vision ensembliste

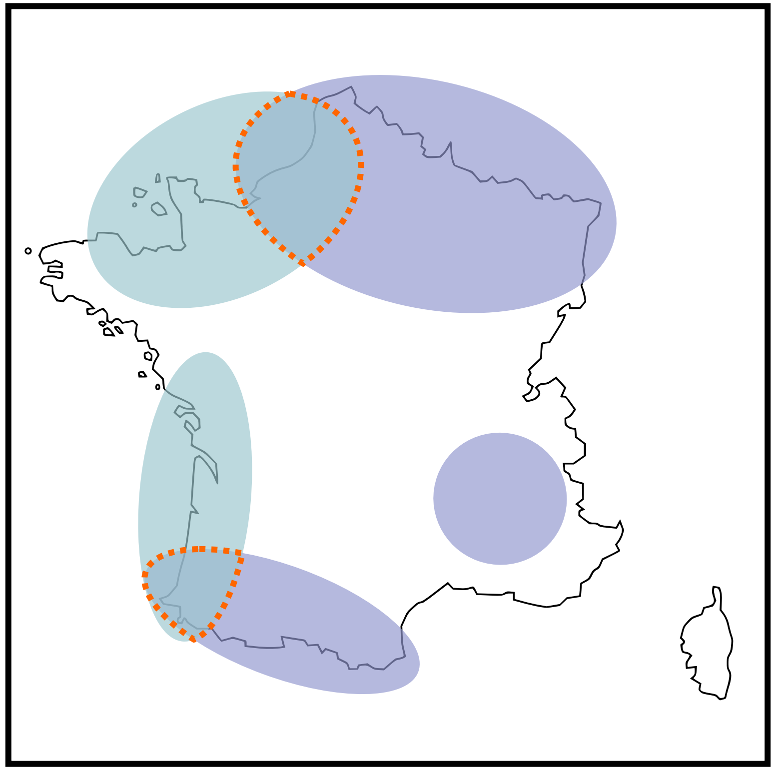
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$

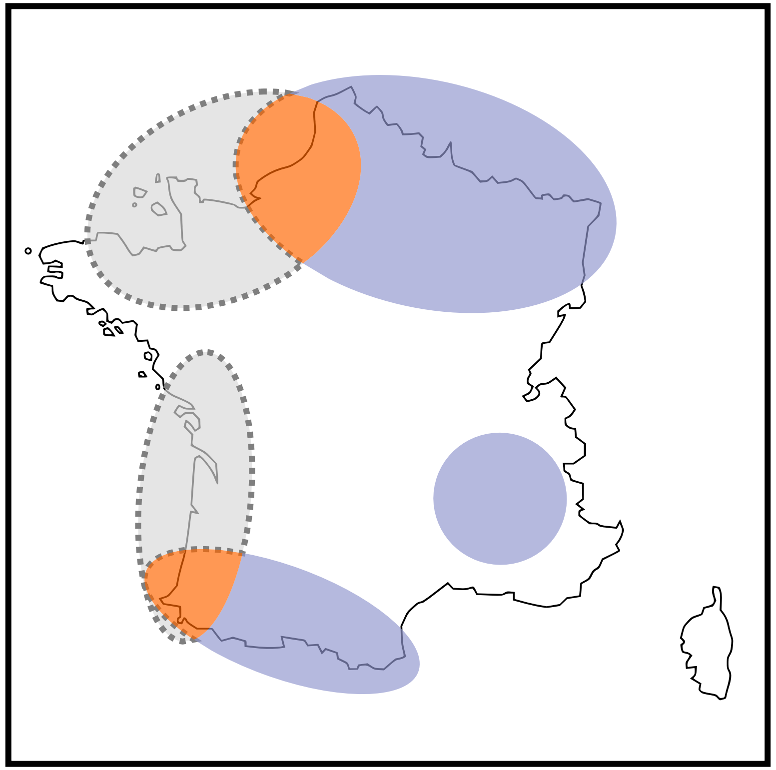
Confirmé à tous les endroits
où il pleut et où il fait froid



Vision ensembliste

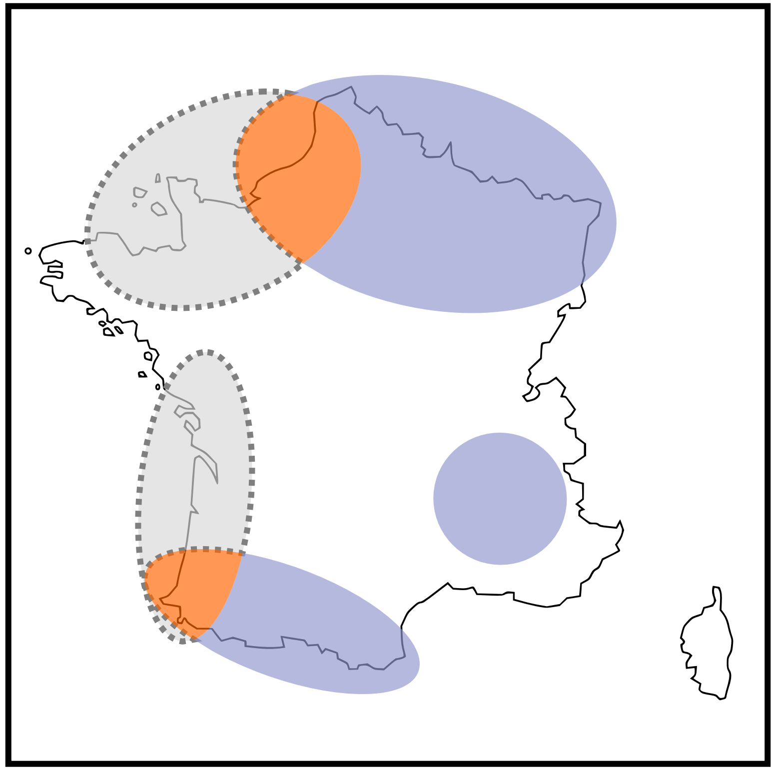
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: *« il pleut »* $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: *« il fait froid»* $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - *« il pleut »* donc *« il fait froid »*: $a \rightarrow b$

Infirmé à tous les endroits où il pleut
mais qu'il ne fait pas froid



Vision ensembliste

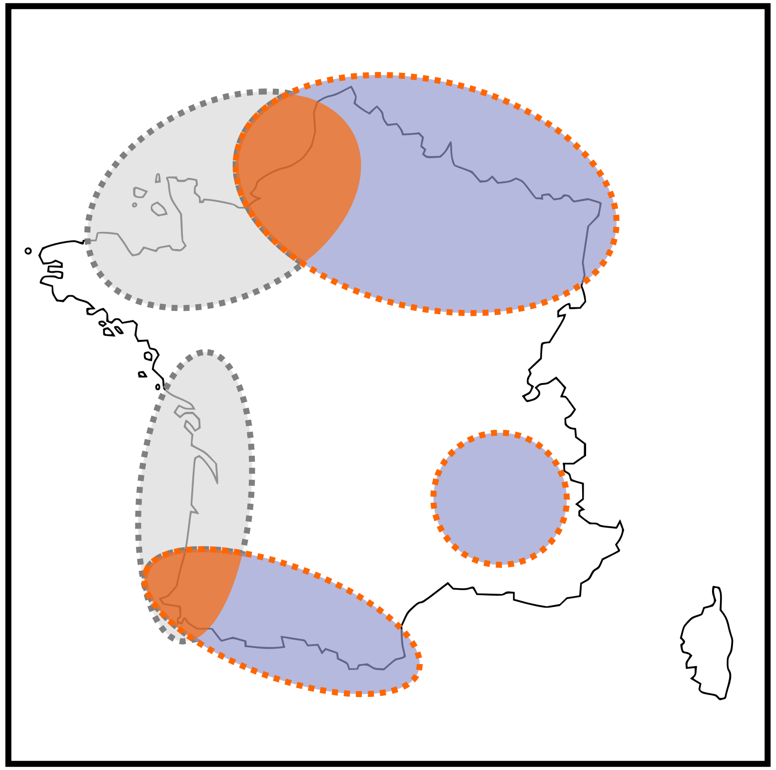
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$



Qu'il fasse froid sans qu'il ne pleuve ne permet pas d'infirmer la proposition.

Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$

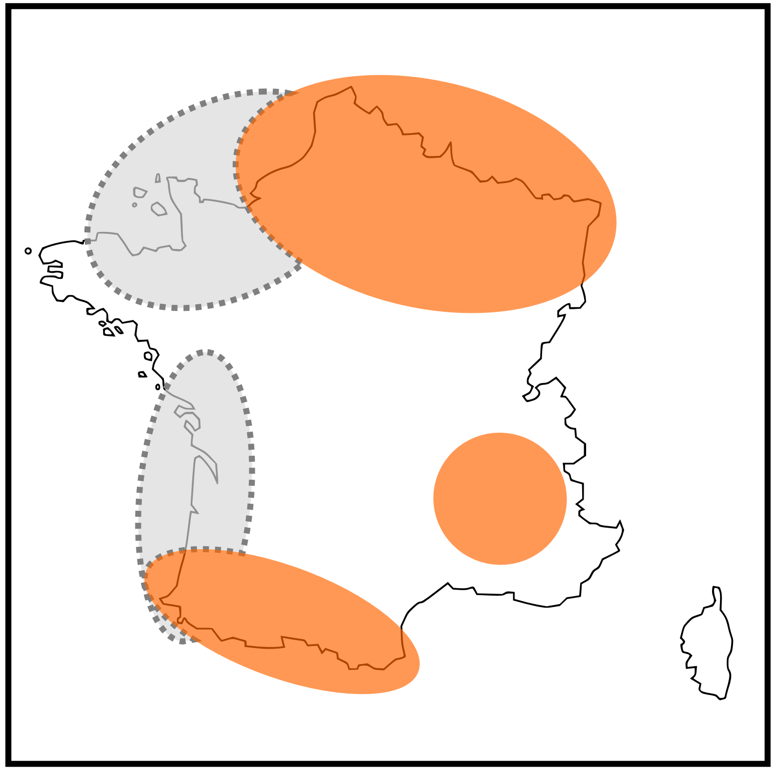


Qu'il fasse froid sans qu'il ne pleuve ne permet pas d'infirmer la proposition.

Monde clos: Ce qui n'est pas faux est vrai

Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$



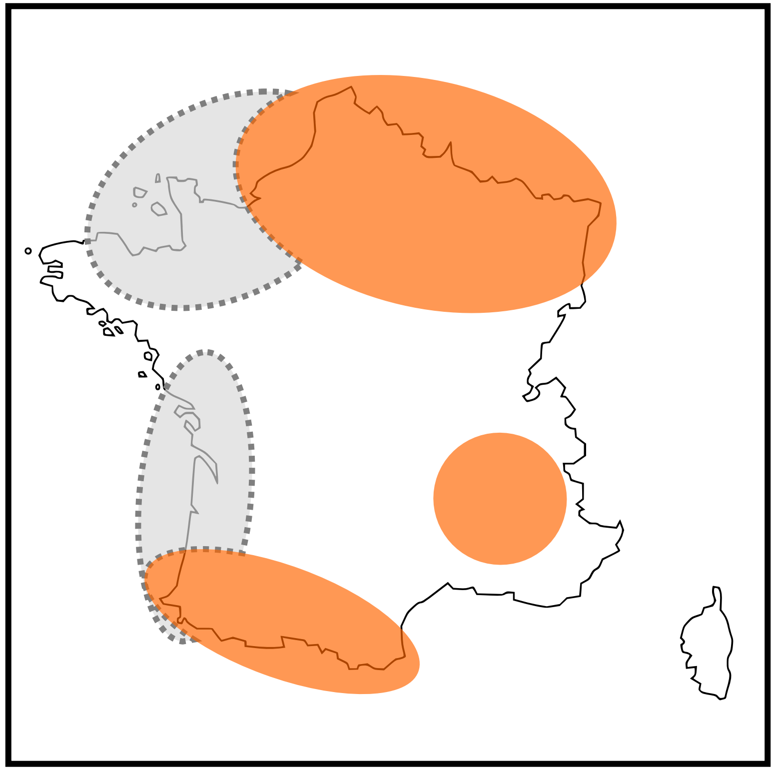
Qu'il pleuve sans qu'il ne fasse froid ne permet pas d'infirmer la proposition.

Monde clos: Ce qui n'est pas faux est vrai

Confirmé partout où il fait froid

Vision ensembliste

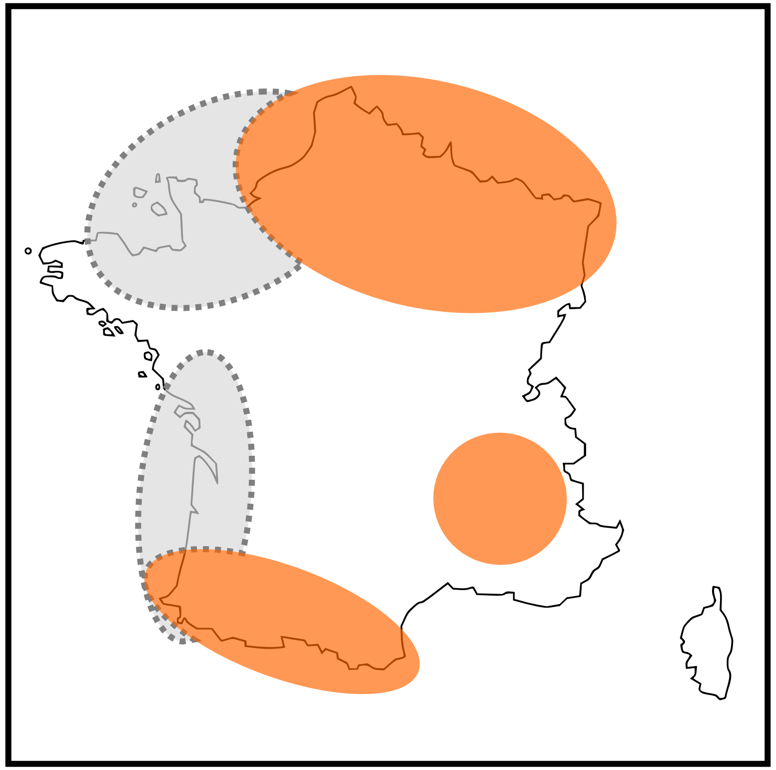
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$



S'il ne fait ni froid ni il pleut, il est impossible d'infirmer la proposition

Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$

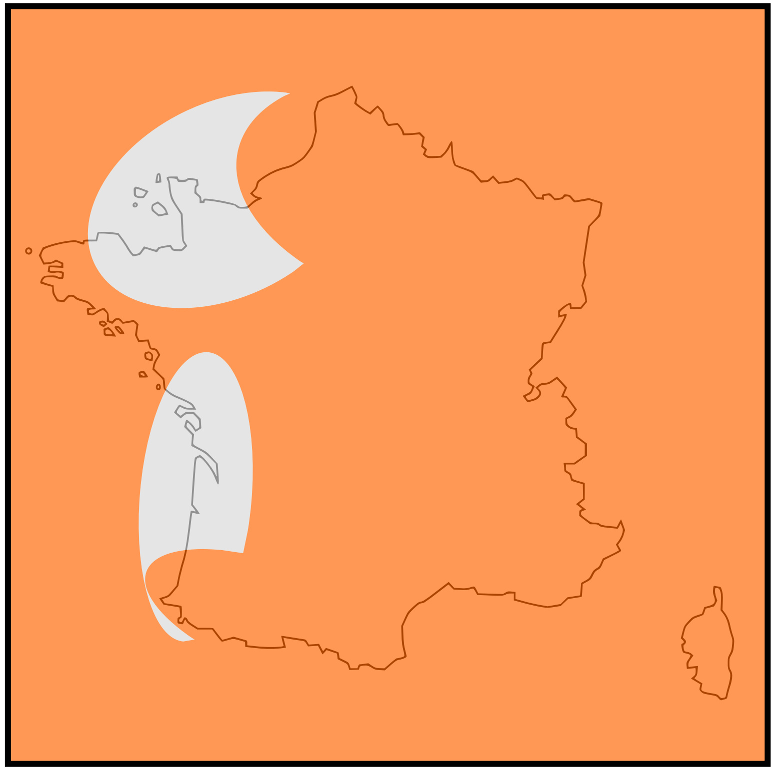


S'il ne fait ni froid ni il pleut, il est impossible d'infirmer la proposition

Monde clos: Ce qui n'est pas faux est vrai

Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$



S'il ne fait ni froid ni il pleut, il est impossible d'infirmer la proposition

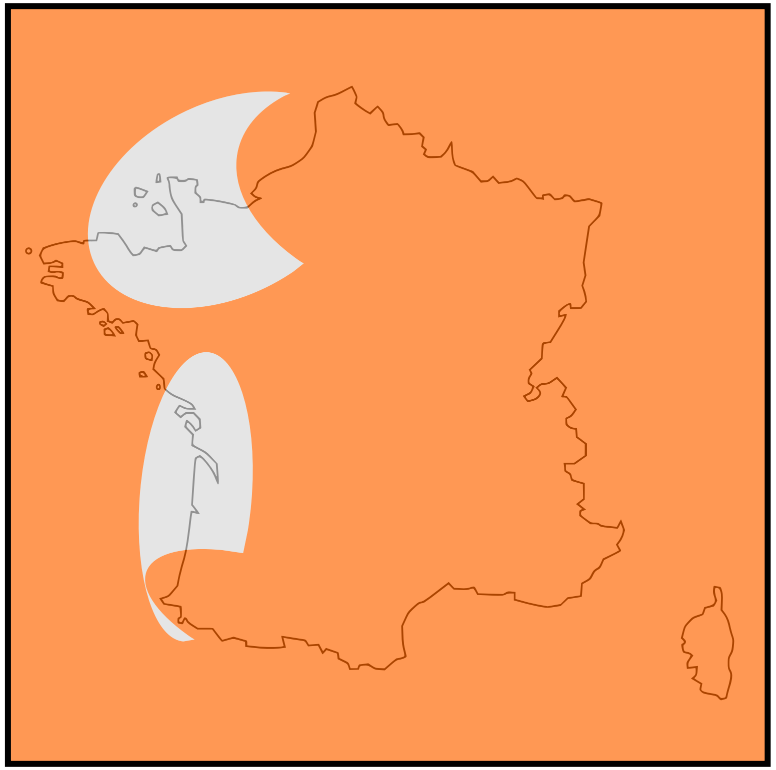
Monde clos: Ce qui n'est pas faux est vrai

Confirmé partout où il ne fait ni froid ni il pleut

Vision ensembliste

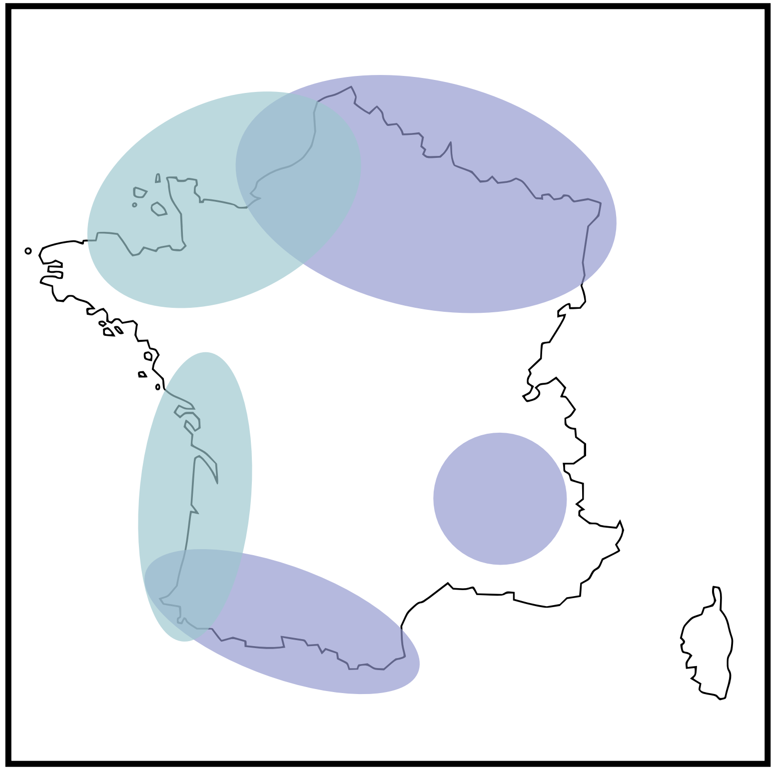
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » donc « *il fait froid* »: $a \rightarrow b$

$$a \rightarrow b \equiv \bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}$$



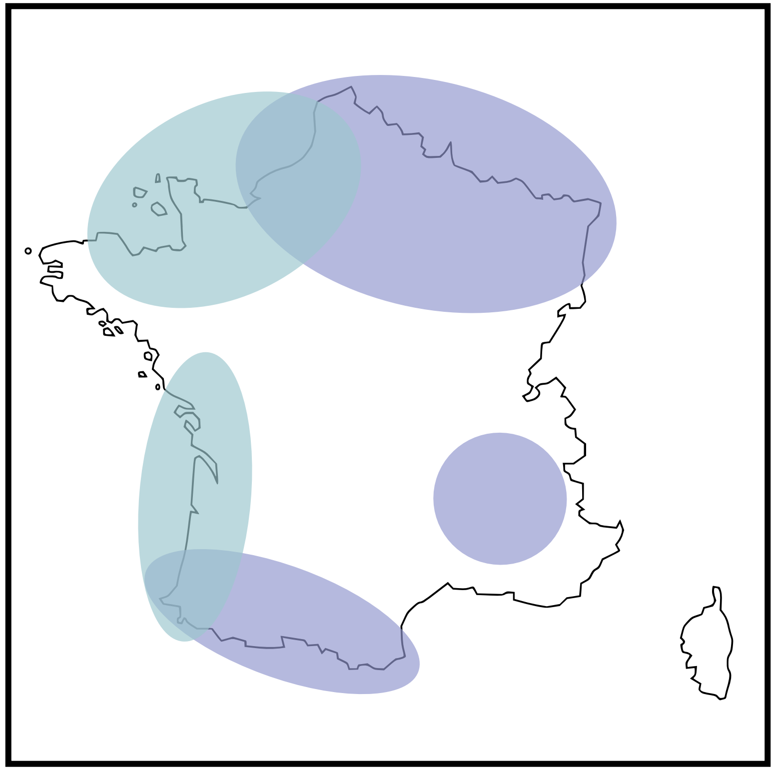
Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » équivaut à « *il fait froid* »



Vision ensembliste

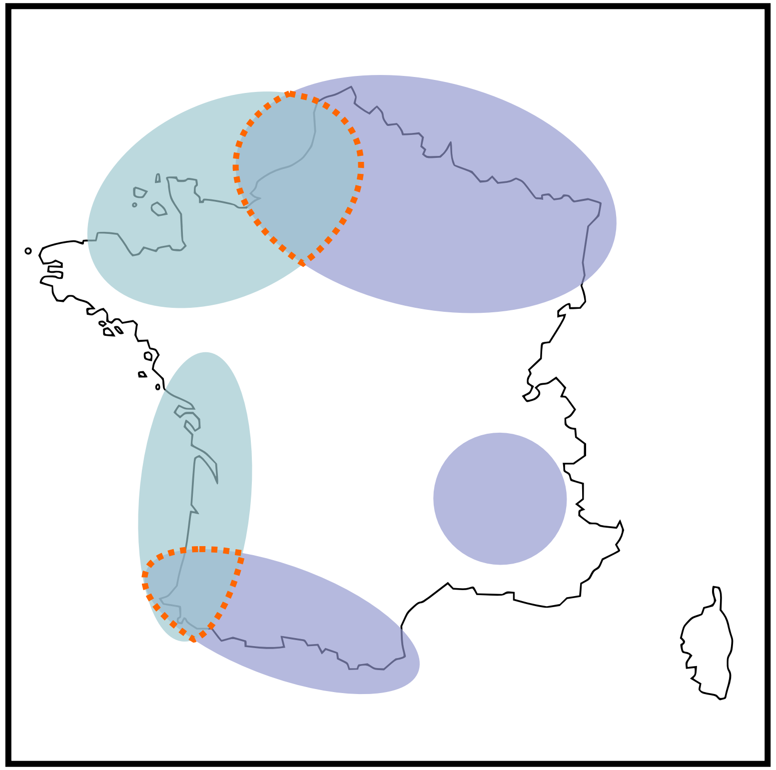
- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » équivaut à « *il fait froid* »: $a \leftrightarrow b$



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » équivaut à « *il fait froid* »: $a \leftrightarrow b$

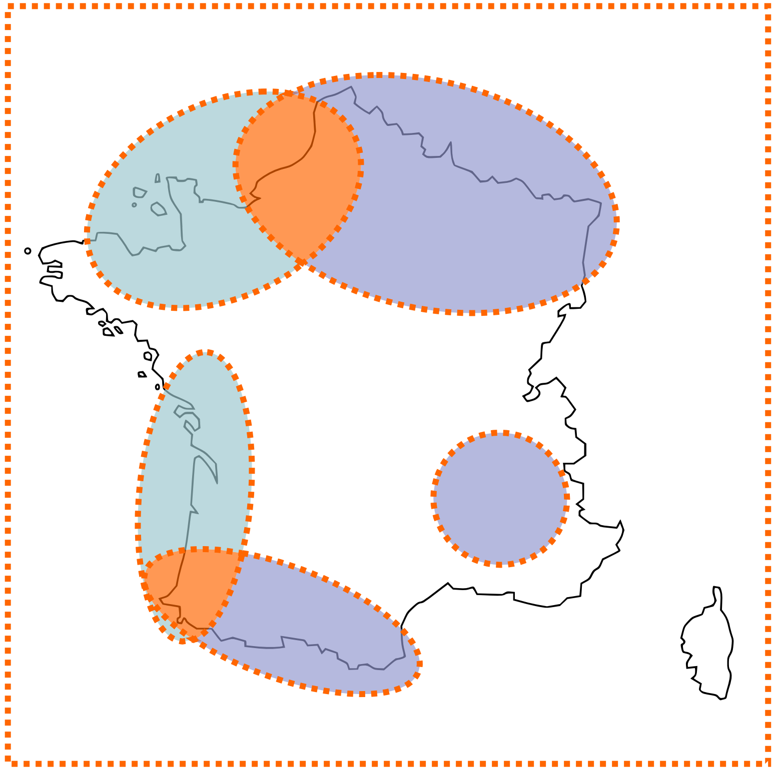
Confirmé à tous les endroits ou a et b sont vraies



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid* » $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » équivaut à « *il fait froid* »: $a \leftrightarrow b$

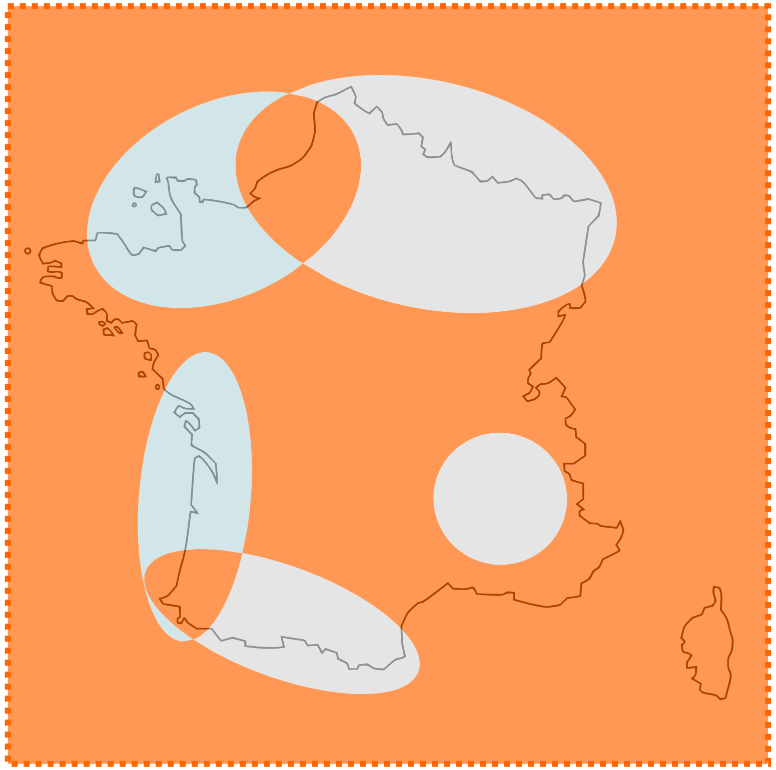
Confirmé à tous les endroits ou a et b sont fausses



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « il pleut » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « il fait froid» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « il pleut » équivaut à « il fait froid »: $a \leftrightarrow b$

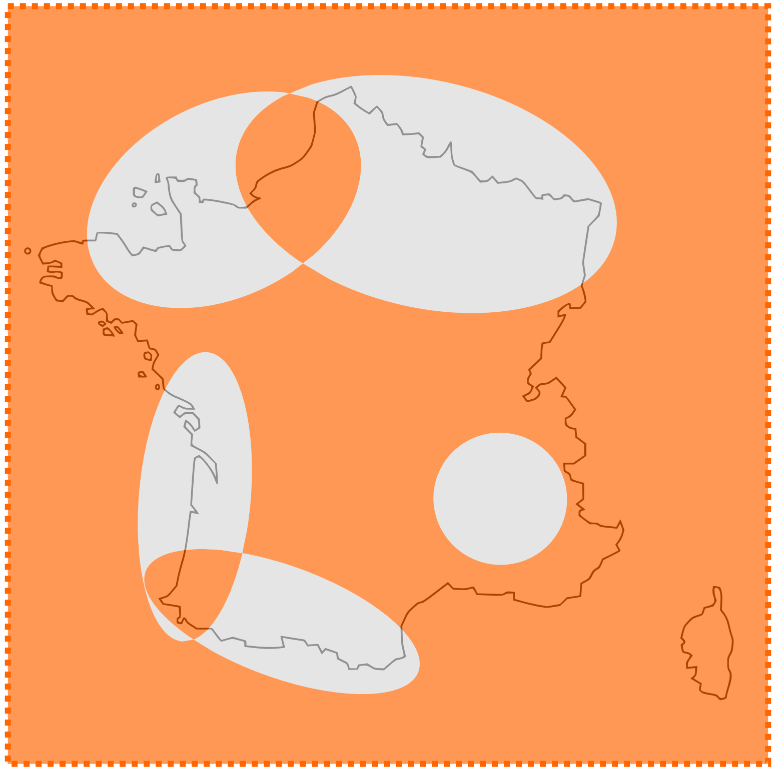
Infirmé à tous les endroits ou a est faux et b est vrai



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » équivaut à « *il fait froid* »: $a \leftrightarrow b$

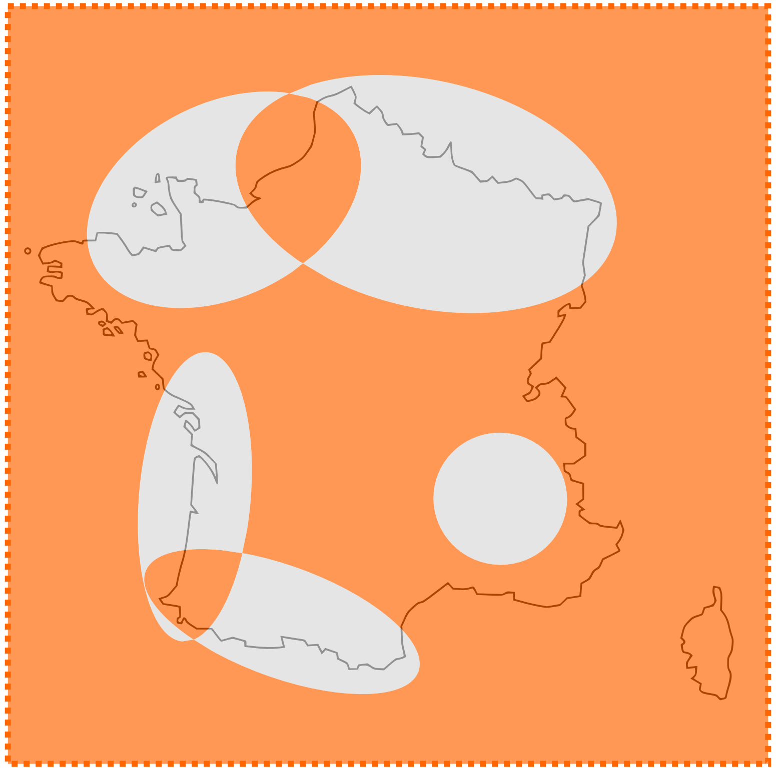
Infirmé à tous les endroits ou a est vrai et b est faux



Vision ensembliste

- Un seul monde clos $\mathcal{W}$
  - a: « *il pleut* » $\equiv \mathcal{A} \subseteq \mathcal{W}$
  - b: « *il fait froid*» $\equiv \mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$
- Connecter les propositions
  - « *il pleut* » équivaut à « *il fait froid* »: $a \leftrightarrow b$

$$a \leftrightarrow b \equiv (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{B}})$$



Vision ensembliste - Récapitulatif

- Monde clos
  - Ensemble fini $\mathcal{W}$ d'éléments
  - Ensemble de propositions a, b pouvant être vraies ou fausses

Vision ensembliste - Récapitulatif

- Monde clos
  - Ensemble fini $\mathcal{W}$ d'éléments
  - Ensemble de propositions a, b pouvant être vraies ou fausses
- Equivalences logiques
  - $a \equiv \mathcal{A}$
  - $\neg a \equiv \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{W}/\mathcal{A}$
  - $a \wedge b \equiv \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
  - $a \vee b \equiv \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
  - $a \rightarrow b \equiv \bar{\mathcal{A}} \cup \mathcal{B}$
  - $a \leftrightarrow b \equiv (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{B}})$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:
  - $\neg A$ est une application de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que:

	$\neg A$
A: vrai	$faux$
A: faux	$vrai$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:
  - $\neg A$ est une application de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que:

	$\neg A$
A: vrai	$faux$
A: faux	$vrai$

  - $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des applications de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telles que:

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:
  - $\neg A$ est une application de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que:

	$\neg A$
A: vrai	$faux$
A: faux	$vrai$

  - $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des applications de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telles que:

$\wedge$	B: vrai	B: faux
A: vrai	vrai	$faux$
A: faux	$faux$	$faux$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:
  - $\neg A$ est une application de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que:

	$\neg A$
A: vrai	$faux$
A: faux	$vrai$

  - $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des applications de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telles que:

∧	B: vrai	B: faux
A: vrai	vrai	$faux$
A: faux	$faux$	$faux$

∨	B: vrai	B: faux
A: vrai	$vrai$	$vrai$
A: Faux	$vrai$	$faux$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:
  - $\neg A$ est une application de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que:

	$\neg A$
A: vrai	$faux$
A: faux	$vrai$

  - $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des applications de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telles que:

$\wedge$	B: vrai	B: faux
A: vrai	vrai	$faux$
A: faux	$faux$	$faux$

$\vee$	B: vrai	B: faux
A: vrai	$vrai$	$vrai$
A: Faux	$vrai$	$faux$

$\leftrightarrow$	B: Vrai	B: faux
A: vrai	$vrai$	$faux$
A: faux	$faux$	$vrai$

Vision applicative

- Soit $\mathbb{B} = \{vrai, faux\}$
- Toute variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$ a pour valeur un élément de $\mathbb{B}$
- Pour toutes formules $A, B \in \mathcal{L}_{p0}$:
  - $\neg A$ est une application de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que:

	$\neg A$
A: vrai	*faux*
A: faux	*vrai*

  - $A \vee B$, $A \rightarrow B$ et $A \leftrightarrow B$ sont des applications de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telles que:

$\wedge$	B: vrai	B: faux
A: vrai	vrai	*faux*
A: faux	*faux*	*faux*

$\vee$	B: vrai	B: faux
A: vrai	*vrai*	*vrai*
A: Faux	*vrai*	*faux*

$\leftrightarrow$	B: Vrai	B: faux
A: vrai	*vrai*	*faux*
A: faux	*faux*	*vrai*

$\rightarrow$	B: vrai	B: faux
A: vrai	*vrai*	*faux*
A: faux	*vrai*	*vrai*

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

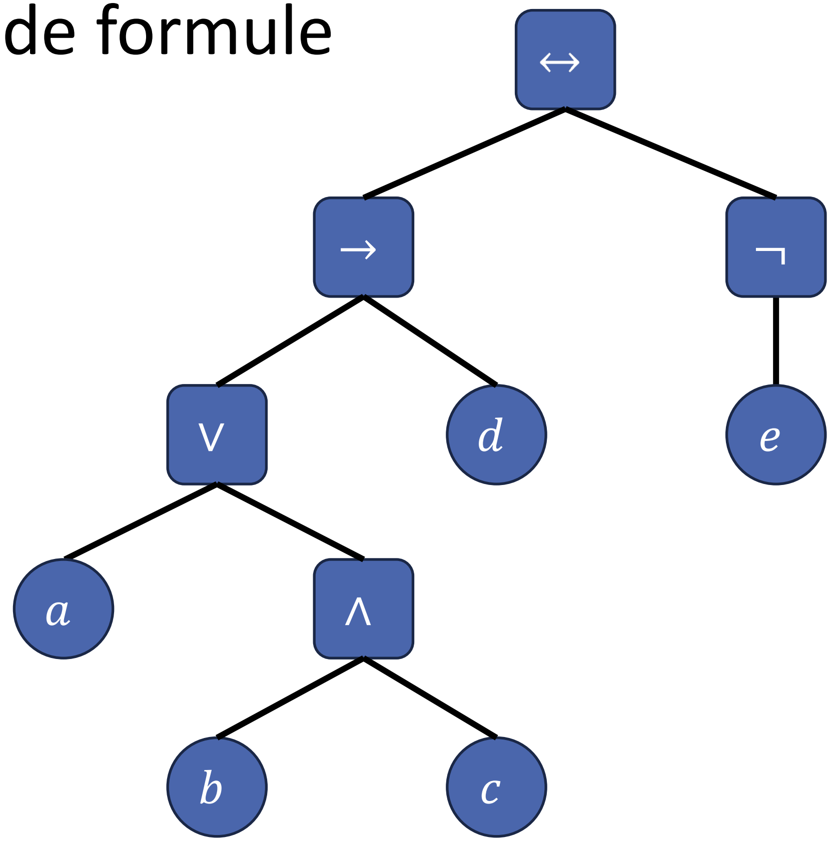
- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \lor b \land c \to d \leftrightarrow \neg e$$

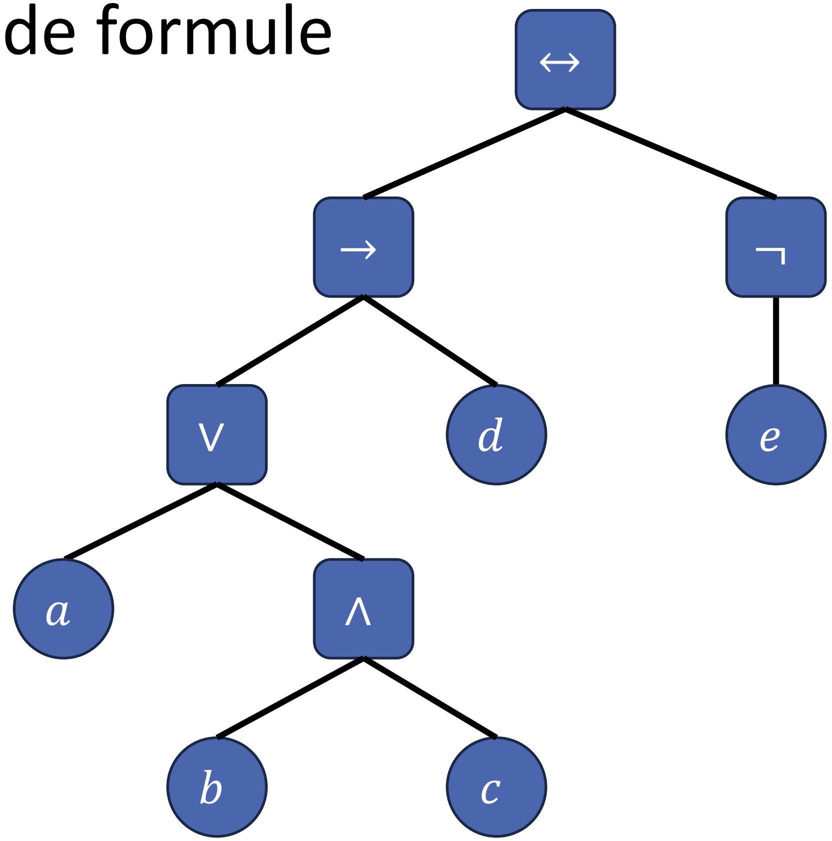


Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$



Evaluation pour:

a: *vrai*

b: *faux*

c: *vrai*

d: *faux*

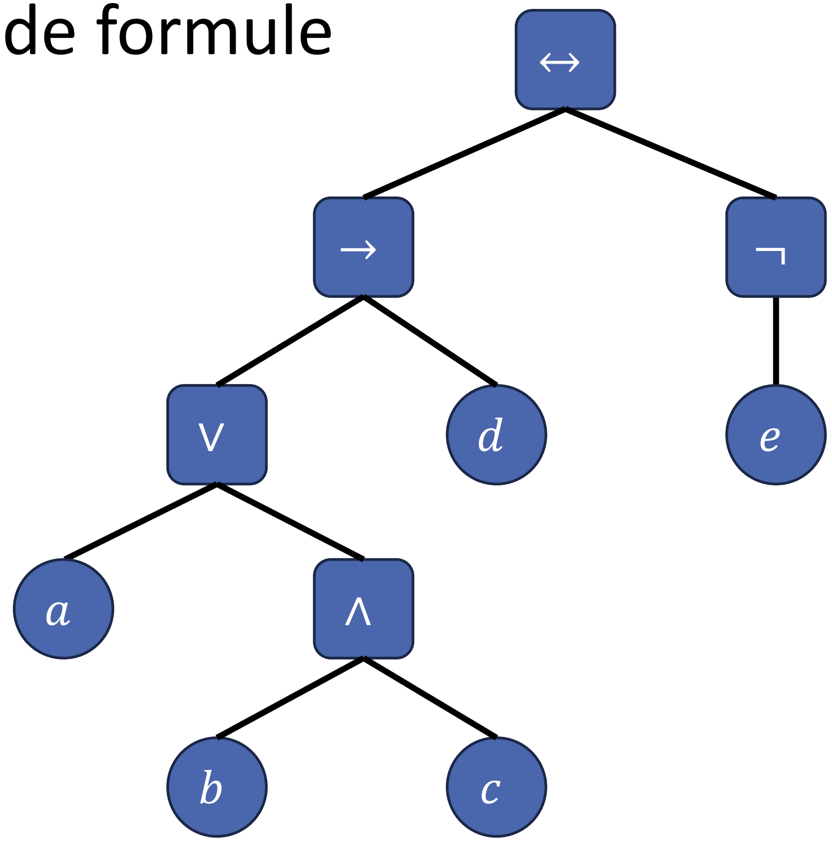
e: *vrai*

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$



Evaluation pour:

a: *vrai*

b: *faux*

c: *vrai*

d: *faux*

e: *vrai*

Parcours postfixé

Evaluation

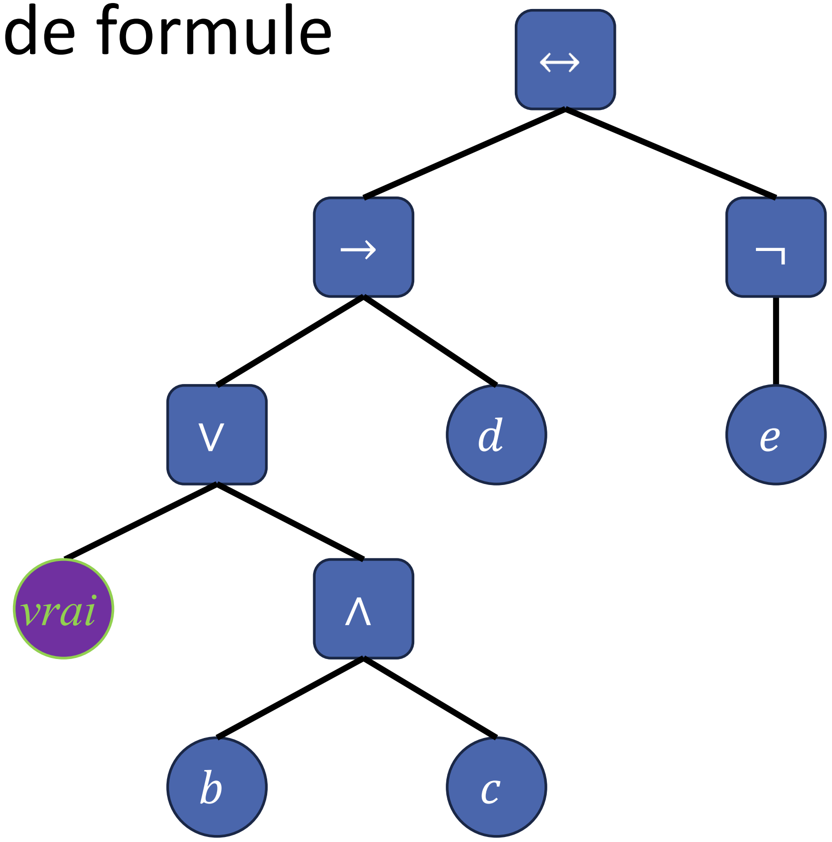
- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \lor b \land c \to d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*



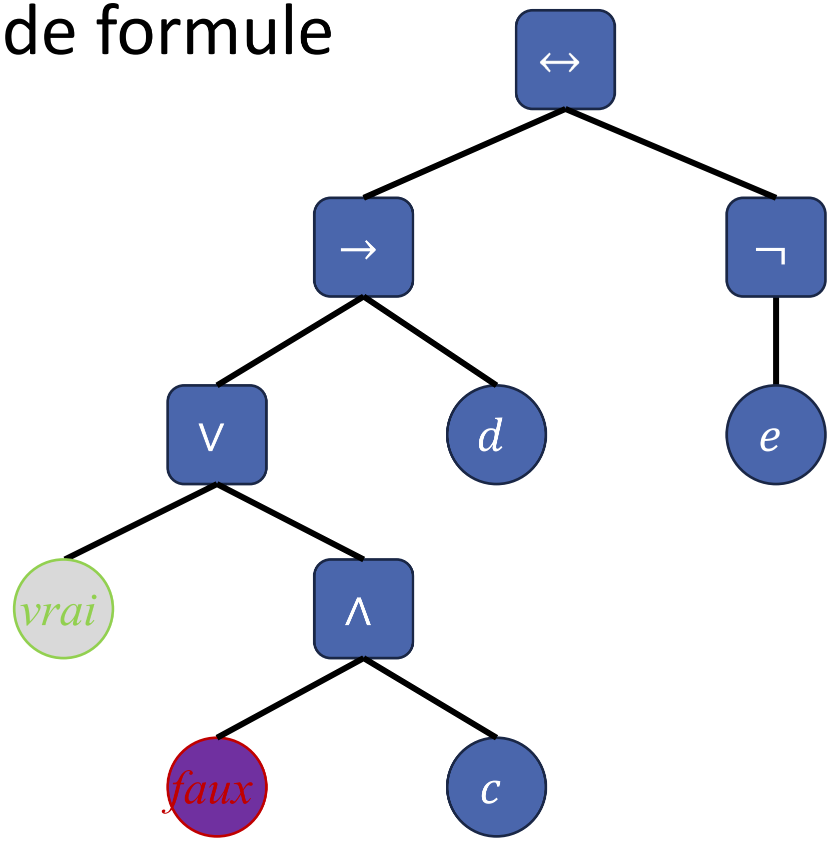
Remplacement de la feuille a par sa valeur

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$



Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Remplacement de la feuille b par sa valeur

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*

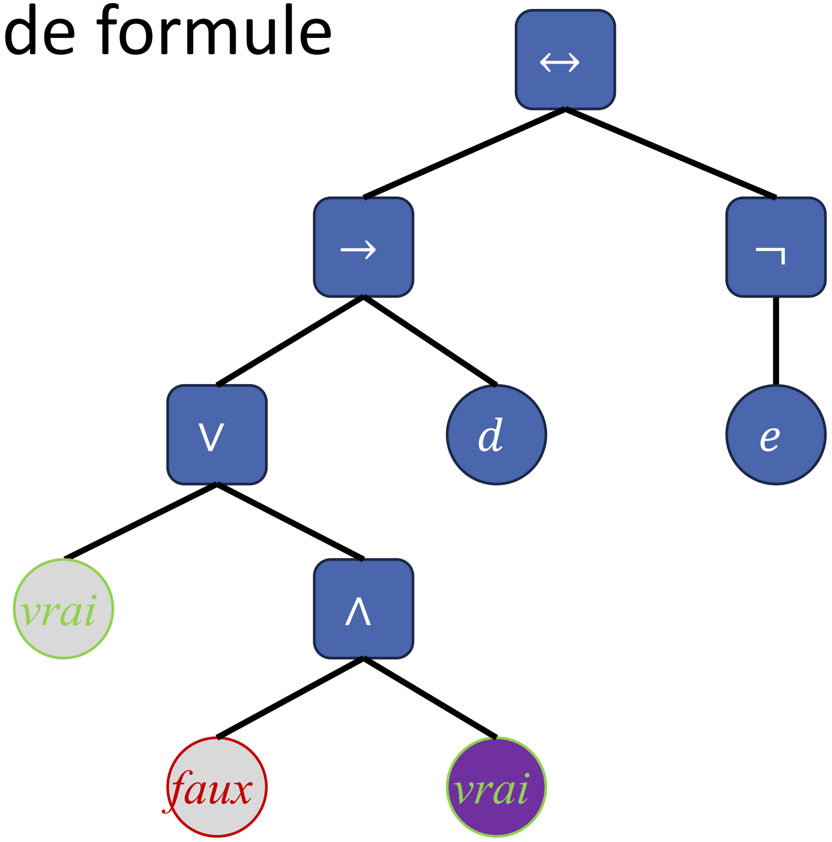
b: *faux*

c: *vrai*

d: *faux*

e: *vrai*

Remplacement de la feuille c par sa valeur

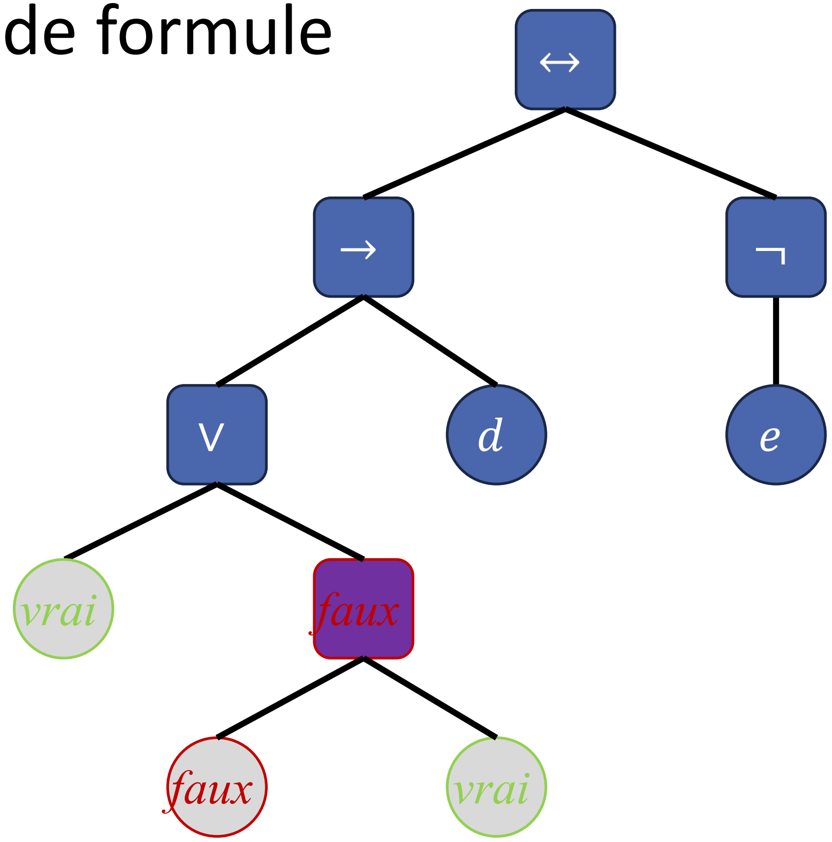


Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \lor b \land c \to d \leftrightarrow \neg e$$



Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Evaluation de ∧

Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

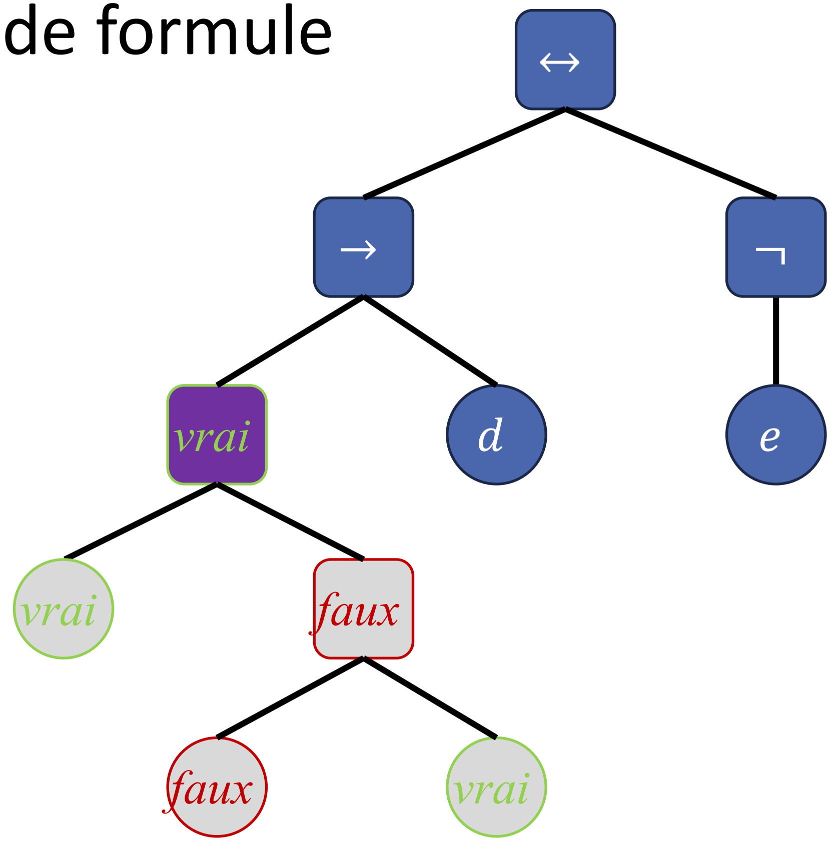
- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Evaluation de ∨



Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

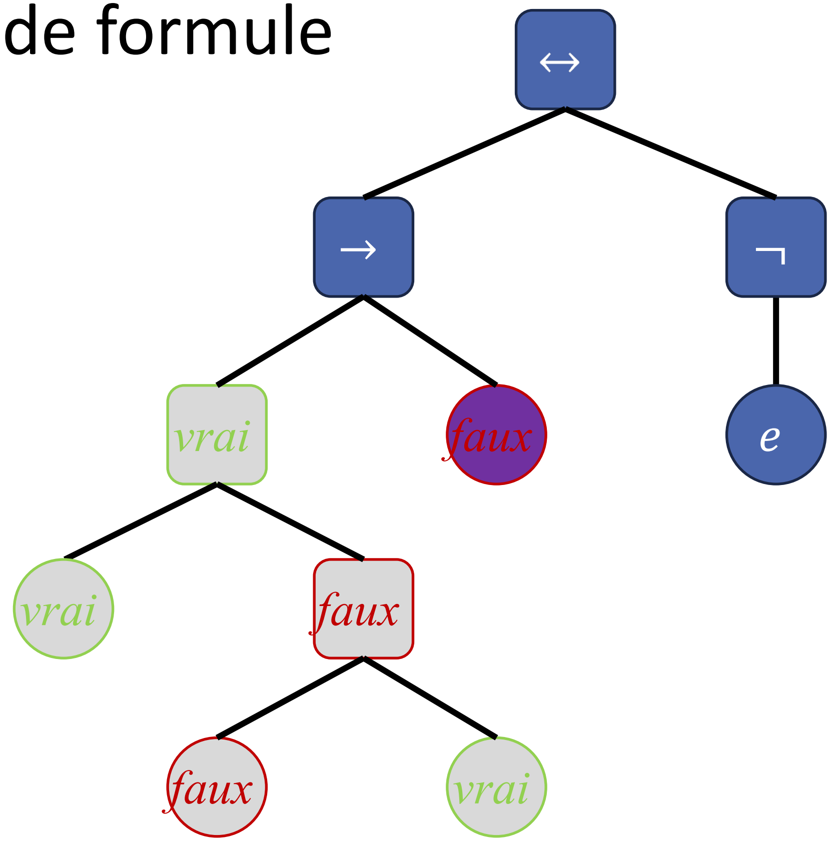
- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Remplacement de la feuille d par sa valeur



Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*

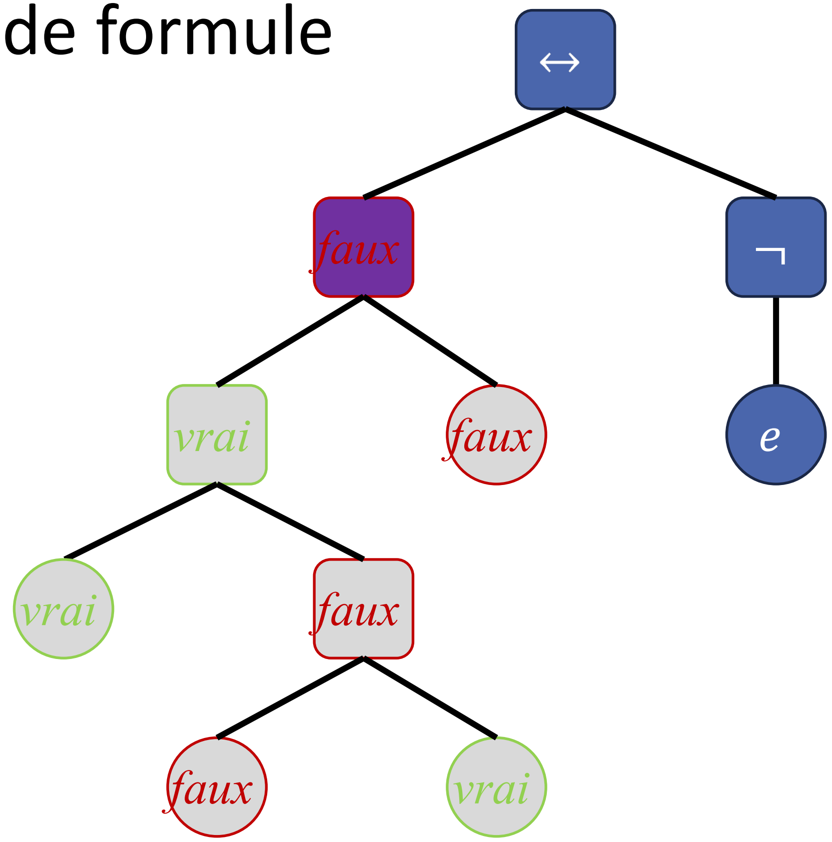
b: *faux*

c: *vrai*

d: *faux*

e: *vrai*

Evaluation de $\rightarrow$



Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

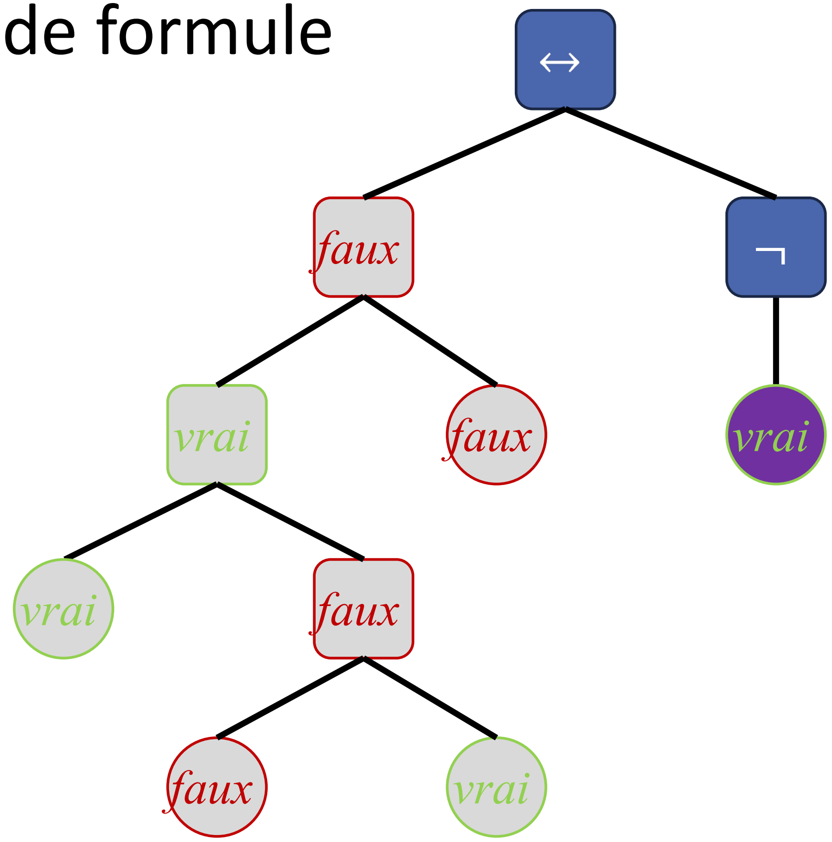
- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Remplacement de la feuille e par sa valeur



Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

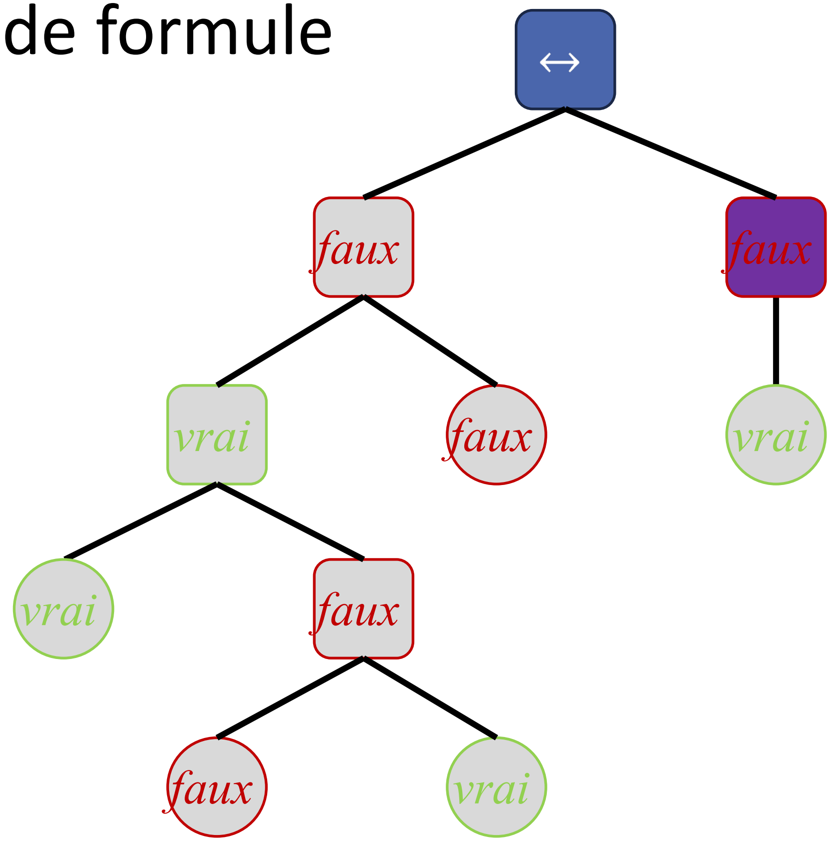
- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \lor b \land c \to d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Evaluation de ¬



Evaluation

- **Evaluation**: Calcul de la valeur d'une formule à partir des valeurs prisent par les variables propositionnelles et des opérateurs qui la composent

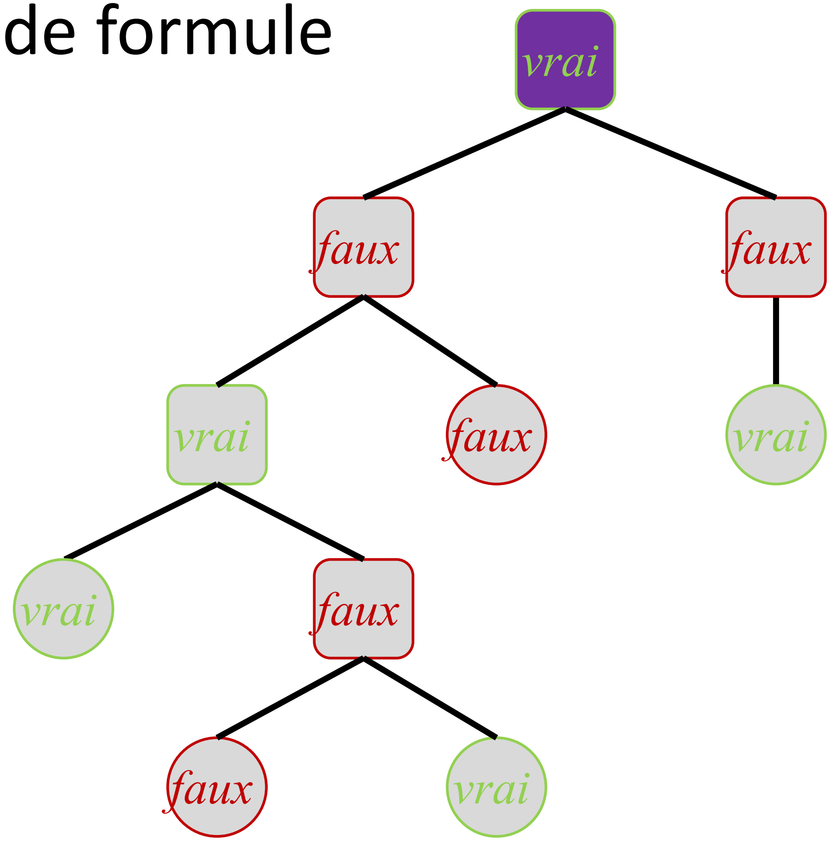
- Réalisable facilement à partir d'un arbre de formule

$$a \vee b \wedge c \rightarrow d \leftrightarrow \neg e$$

Evaluation pour:

a: *vrai*
b: *faux*
c: *vrai*
d: *faux*
e: *vrai*

Evaluation de $\leftrightarrow$



Evaluation

- **Théorème:** L'évaluation d'un formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ est un problème **calculable en un temps fini**

Evaluation

- **Théorème:** L'évaluation d'un formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ est un problème **calculable en un temps fini**

- **Preuve:**
  - Toute formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ peut être représentée par un **arbre binaire** possédant $|F|$ nœuds, $|F| - 1$ arêtes et une **profondeur de** $\lfloor \log_2(|F|) \rfloor + 1$

Evaluation

- **Théorème:** L'évaluation d'un formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ est un problème **calculable en un temps fini**

- **Preuve:**
  - Toute formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ peut être représentée par un **arbre binaire** possédant $|F|$ nœuds, $|F| - 1$ arêtes et une **profondeur de** $\lfloor \log_2(|F|) \rfloor + 1$

  - Toute formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ peut être **évaluée** par un **parcours postfixé** de son arbre

Evaluation

- **Théorème:** L'évaluation d'un formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ est un problème **calculable en un temps fini**

- **Preuve:**
  - Toute formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ de taille $|F|$ peut être représentée par un **arbre binaire** possédant $|F|$ nœuds, $|F| - 1$ arêtes et une **profondeur de** $\lfloor \log_2(|F|) \rfloor + 1$
  - Toute formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ peut être **évaluée** par un **parcours postfixé** de son arbre
  - Le parcours postfixé d'un arbre binaire a une **complexité en $\mathcal{O}(n)$**, où n est le nombre de nœuds.

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. Une **interprétation** est un **tuple**, noté ω, qui associe à chaque variable de $\mathcal{P}$ une valeur $v \in \mathbb{B}$

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. Une **interprétation** est un **tuple**, noté ω, qui associe à chaque variable de $\mathcal{P}$ une valeur $v \in \mathbb{B}$

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. Une **interprétation** est un **tuple**, noté ω, qui associe à chaque variable de $\mathcal{P}$ une valeur $v \in \mathbb{B}$

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - Le tuple $\omega = \{a: vrai, b: faux, c: vrai\}$ en est une interprétation

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. Une **interprétation** est un **tuple**, noté ω, qui associe à chaque variable de $\mathcal{P}$ une valeur $v \in \mathbb{B}$

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - Le tuple $\omega = \{a: vrai, b: faux, c: vrai\}$ en est une interprétation
  - La valeur de F pour ω est *faux*

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. **L'ensemble des interprétations**, noté $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n\}}$, est l'ensemble de **toutes les interprétations** ω_i possibles **formées à partir de** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. **L'ensemble des interprétations**, noté $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}}$, est l'ensemble de **toutes les interprétations** ω_i possibles **formées à partir de $\mathcal{P}$**.

- Pour un ensemble donné $\mathcal{P}$ de k variables propositionnelles à valeurs dans $\mathbb{B}$, il existe $\boldsymbol{2^k}$ interprétations possibles.

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. **L'ensemble des interprétations**, noté $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n\}}$, est l'ensemble de **toutes les interprétations** ω_i possibles **formées à partir de $\mathcal{P}$**.

- Pour un ensemble donné $\mathcal{P}$ de k variables propositionnelles à valeurs dans $\mathbb{B}$, il existe $\mathbf{2^k}$ interprétations possibles.

Exemple

- Soit la formule $(\neg a \vee b) \wedge c$

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. **L'ensemble des interprétations**, noté $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}}$, est l'ensemble de **toutes les interprétations** ω_i possibles **formées à partir de $\mathcal{P}$**.

- Pour un ensemble donné $\mathcal{P}$ de k variables propositionnelles à valeurs dans $\mathbb{B}$, il existe $\mathbf{2^k}$ interprétations possibles.

Exemple

- Soit la formule $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$

Interprétation

- **Définition:** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles. **L'ensemble des interprétations**, noté $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}}$, est l'ensemble de **toutes les interprétations** ω_i possibles **formées à partir de $\mathcal{P}$**.

- Pour un ensemble donné $\mathcal{P}$ de k variables propositionnelles à valeurs dans $\mathbb{B}$, il existe $\boldsymbol{2^k}$ interprétations possibles.

Exemple

- Soit la formule $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$

Interprétation	a	b	c
ω_0	*faux*	*faux*	*faux*
ω_1	*vrai*	*faux*	*faux*
ω_2	*faux*	*vrai*	*faux*
ω_3	*vrai*	*vrai*	*faux*
ω_4	*faux*	*faux*	*vrai*
ω_5	*vrai*	*faux*	*vrai*
ω_6	*faux*	*vrai*	*vrai*
ω_7	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Interprétation

- **Notation:** Pour une variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$, l'interprétation {a: vrai} est notée $\{a\}$ et l'interprétation {a: faux} est notée $\{\neg a\}$

Interprétation

- **Notation:** Pour une variable propositionnelle $v \in \mathcal{P}$, l'interprétation {a: vrai} est notée $\{a\}$ et l'interprétation {a: faux} est notée $\{\neg a\}$

Exemple

- Soit la formule $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$

Interprétation	a	b	c
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	*faux*	*vrai*	*faux*
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	*faux*	*faux*	*vrai*
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Valeur de formule

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule et soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. La **valeur de $\boldsymbol{F}$ pour l'interprétation $\boldsymbol{\omega}$**, notée $[F]_\omega$ est l'application de $\mathcal{L}_{p0}$ dans $\mathbb{B}$ qui associe à F une **valeur** d'après les valeurs des variables propositionnelles données par ω.

Valeur de formule

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule et soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. La **valeur de F pour l'interprétation ω**, notée $[F]_\omega$ est l'application de $\mathcal{L}_{p0}$ dans $\mathbb{B}$ qui associe à F une **valeur** d'après les valeurs des variables propositionnelles données par ω.

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$

Valeur de formule

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule et soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. La **valeur de F pour l'interprétation ω**, notée $[F]_\omega$ est l'application de $\mathcal{L}_{p0}$ dans $\mathbb{B}$ qui associe à F une **valeur** d'après les valeurs des variables propositionnelles données par ω.

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$

Interprétation	a	b	c
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	*faux*	*vrai*	*faux*
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	*faux*	*faux*	*vrai*
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Valeur de formule

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule et soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. La **valeur de F pour l'interprétation ω**, notée $[F]_\omega$ est l'application de $\mathcal{L}_{p0}$ dans $\mathbb{B}$ qui associe à F une **valeur** d'après les valeurs des variables propositionnelles données par ω.

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$
  - $[F]_{\omega_0} = faux$

Interprétation	a	b	c	$[F]_\omega$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$vrai$

Valeur de formule

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule et soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. La **valeur de F pour l'interprétation ω**, notée $[F]_\omega$ est l'application de $\mathcal{L}_{p0}$ dans $\mathbb{B}$ qui associe à F une **valeur** d'après les valeurs des variables propositionnelles données par ω.

Exemple

- Soit la formule F: $(\neg a \lor b) \land c$
  - $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$
  - $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$
  - $[F]_{\omega_0} = faux$, $[F]_{\omega_6} = vrai$

Interprétation	a	b	c	$[F]_\omega$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$vrai$

Satisfaction

- **Définition:** Soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaite par $\boldsymbol{\omega}$** si et seulement si **la valeur de $\boldsymbol{F}$ pour $\boldsymbol{\omega}$** est $\boldsymbol{vrai}$.

Satisfaction

- **Définition:** Soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaite par $\boldsymbol{\omega}$** si et seulement si **la valeur de $\boldsymbol{F}$ pour $\boldsymbol{\omega}$** est $\boldsymbol{vrai}$.

- **Définition:** Soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **falsifiée (insatisfaite) par $\boldsymbol{\omega}$** si et seulement si **la valeur de $\boldsymbol{F}$ pour $\boldsymbol{\omega}$** est $\boldsymbol{faux}$.

Satisfaction

- **Définition:** Soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaite par ω** si et seulement si **la valeur de F pour ω** est ***vrai***.

- **Définition:** Soit $\omega \in \Omega$ une interprétation. Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **falsifiée (insatisfaite) par ω** si et seulement si **la valeur de F pour ω** est ***faux***.

Exemple

- La formule $(\neg a \lor b) \land c$
  - Est satisfaite par l'interprétation ω_6
  - Est falsifiée par l'interprétation ω_1

Interprétation	a	b	c	$[F]_\omega$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	*faux*	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	*vrai*	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	*faux*	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*	*faux*
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	*vrai*	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Modèle

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Une **interprétation** $\omega \in \Omega$ est un **modèle** de F si et seulement si $\boldsymbol{\omega}$ **satisfait** $\boldsymbol{F}$.

Modèle

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Une **interprétation** $\omega \in \Omega$ est un **modèle** de F si et seulement si $\boldsymbol{\omega}$ **satisfait** $\boldsymbol{F}$.

- **Notation:** L'ensemble des modèles d'une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est noté $Mod(F)$.

Modèle

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Une **interprétation** $\omega \in \Omega$ est un **modèle** de F si et seulement si **$\boldsymbol{\omega}$ satisfait $\boldsymbol{F}$**.

- **Notation:** L'ensemble des modèles d'une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est noté $Mod(F)$.

Exemple

- Soit la formule $F = (\neg a \lor b) \land c$

Interprétation	a	b	c
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	*faux*	*vrai*	*faux*
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	*faux*	*faux*	*vrai*
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Modèle

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Une **interprétation** $\omega \in \Omega$ est un **modèle** de F si et seulement si $\boldsymbol{\omega}$ **satisfait** $\boldsymbol{F}$.

- **Notation:** L'ensemble des modèles d'une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est noté $Mod(F)$.

Exemple

- Soit la formule $F = (\neg a \vee b) \wedge c$
  - Les interprétations ω_4, ω_6 et ω_7 sont des modèles de la formule car elles la satisfont

Interprétation	a	b	c
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b, \neg c\}$	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b, \neg c\}$	*faux*	*vrai*	*faux*
$\omega_3 = \{\ a,\ b, \neg c\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b,\ c\}$	*faux*	*faux*	*vrai*
$\omega_5 = \{\ a, \neg b,\ c\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*
$\omega_6 = \{\neg a,\ b,\ c\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_7 = \{\ a,\ b,\ c\}$	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Modèle

- **Définition:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Une **interprétation** $\omega \in \Omega$ est un **modèle** de F si et seulement si $\boldsymbol{\omega}$ **satisfait** $\boldsymbol{F}$.

- **Notation:** L'ensemble des modèles d'une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est noté $Mod(F)$.

Exemple

- Soit la formule $F = (\neg a \lor b) \land c$
  - Les interprétations ω_4, ω_6 et ω_7 sont des modèles de la formule car elles la satisfont
  - $Mod(F) = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7\}$

Interprétation	a	b	c
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	*faux*	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	*vrai*	*faux*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	*faux*	*vrai*	*faux*
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	*faux*	*faux*	*vrai*
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Satisfiabilité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaisable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **satisfait** ($[F]_\omega = vrai$)

Satisfiabilité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaisable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **satisfait** ($[F]_\omega = \boldsymbol{vrai}$)
- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **falsifiable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **falsifie** ($[F]_\omega = \boldsymbol{faux}$)

Satisfiabilité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaisable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **satisfait** ($[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{vrai}$)
- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **falsifiable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **falsifie** ($[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{faux}$)

Exemple

- La formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$

Satisfiabilité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaisable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **satisfait** ($[F]_\omega = vrai$)
- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **falsifiable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **falsifie** ($[F]_\omega = faux$)

Exemple

- La formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - Est satisfaisable car $[F]_{\omega_0} = vrai$

Evaluation	$(\neg a \vee b)$	c	$(\neg a \vee b) \wedge c$
ω_0	*vrai*	*vrai*	*vrai*
ω_1	*vrai*	*faux*	*faux*
ω_4	*vrai*	*vrai*	*vrai*
ω_6	*vrai*	*vrai*	*vrai*

Satisfiabilité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **satisfaisable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **satisfait** ($[F]_\omega = vrai$)
- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **falsifiable** s'il existe au moins une interprétation $\omega \in \Omega$ qui la **falsifie** ($[F]_\omega = faux$)

Exemple

- La formule F: $(\neg a \vee b) \wedge c$
  - Est satisfaisable car $[F]_{\omega_0} = vrai$
  - Est falsifiable car $[F]_{\omega_1} = faux$

Evaluation	$(\neg a \vee b)$	c	$(\neg a \vee b) \wedge c$
ω_0	vrai	vrai	vrai
ω_1	vrai	faux	faux
ω_4	vrai	vrai	vrai
ω_6	vrai	vrai	vrai

Validité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **valide (ou est une tautologie)** si **toute les interprétations** $\omega \in \Omega$ la **satisfont** ($[F]_\omega = vrai$) soit encore $\boldsymbol{Mod(F) = \Omega}$

Validité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **valide (ou est une tautologie)** si **toute les interprétations** $\omega \in \Omega$ la **satisfont** ($[F]_\omega = \boldsymbol{vrai}$) soit encore $\boldsymbol{Mod(F) = \Omega}$

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **contradictoire** si **toutes les interprétation** $\omega \in \Omega$ la **falsifient** ($[F]_\omega = \boldsymbol{faux}$). Soit encore $\boldsymbol{Mod(F) = \emptyset}$

Validité

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **valide (ou est une tautologie)** si **toute les interprétations** $\omega \in \Omega$ la **satisfont** ($[F]_\omega = \boldsymbol{vrai}$) soit encore $\boldsymbol{Mod(F) = \Omega}$

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est **contradictoire** si **toutes les interprétation** $\omega \in \Omega$ la **falsifient** ($[F]_\omega = \boldsymbol{faux}$). Soit encore $\boldsymbol{Mod(F) = \emptyset}$

Exemple

Formule	Satisfaisable	Falsifiable	Valide	Contradictoire
$(\neg a \vee b) \wedge (c \wedge \neg d)$	x	x		
$\neg a \wedge a$		x		x
$\neg b \vee b$	x		x	

Equivalence logique

- **Définition:** Deux formules $Fet\ G \in \mathcal{L}_{p0}$ sont dites **équivalentes**, noté $\boldsymbol{F \equiv G}$ si et seulement si pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{G}]_{\boldsymbol{\omega}}$

Equivalence logique

- **Définition:** Deux formules $F et\ G \in \mathcal{L}_{p0}$ sont dites **équivalentes**, noté $\boldsymbol{F \equiv G}$ si et seulement si pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{G}]_{\boldsymbol{\omega}}$

Exemple

- Soit F: $\neg(a \wedge b)$ et G: $\neg a \vee \neg b$

Equivalence logique

- **Définition:** Deux formules $Fet\ G \in \mathcal{L}_{p0}$ sont dites **équivalentes**, noté $\boldsymbol{F \equiv G}$ si et seulement si pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $[F]_\omega = [G]_\omega$

Exemple

- Soit F: $\neg(a \wedge b)$ et G: $\neg a \vee \neg b$

Ω	A	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*

Equivalence logique

- **Définition:** Deux formules $F et\ G \in \mathcal{L}_{p0}$ sont dites **équivalentes**, noté $\boldsymbol{F \equiv G}$ si et seulement si pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{G}]_{\boldsymbol{\omega}}$

Exemple

- Soit F: $\neg(a \wedge b)$ et G: $\neg a \vee \neg b$

Ω	a	b	$\neg(a \wedge b)$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*	*vrai*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*

Equivalence logique

- **Définition:** Deux formules $Fet\ G \in \mathcal{L}_{p0}$ sont dites **équivalentes**, noté $\boldsymbol{F \equiv G}$ si et seulement si pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{G}]_{\boldsymbol{\omega}}$

Exemple

- Soit F: $\neg(a \wedge b)$ et G: $\neg a \vee \neg b$

Ω	a	b	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a \vee \neg b$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*	*faux*

Equivalence logique

- **Définition:** Deux formules $F et\ G \in \mathcal{L}_{p0}$ sont dites **équivalentes**, noté $\boldsymbol{F \equiv G}$ si et seulement si pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $[\boldsymbol{F}]_{\boldsymbol{\omega}} = [\boldsymbol{G}]_{\boldsymbol{\omega}}$

Exemple

- Soit F: $\neg(a \wedge b)$ et G: $\neg a \vee \neg b$

$$F \equiv G$$

$\boldsymbol{\Omega}$	a	b	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a \vee \neg b$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*	*vrai*	*vrai*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*	*vrai*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*	*faux*	*faux*

Equivalence logique remarquables

- **Disjonction**
  - $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (associativité)
  - $A \vee B \equiv B \vee A$ (commutativité)
  - $\bot \vee B \equiv B$ (élément neutre) et $\top \vee B \equiv \top$ (élément absorbant)
  - $B \vee B \equiv B$ (idempotence)

Equivalence logique remarquables

- **Disjonction**
  - $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (associativité)
  - $A \vee B \equiv B \vee A$ (commutativité)
  - $\bot \vee B \equiv B$ (élément neutre) et $\top \vee B \equiv \top$ (élément absorbant)
  - $B \vee B \equiv B$ (idempotence)

- **Conjonction**
  - $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (associativité)
  - $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (commutativité)
  - $\top \wedge B \equiv B$ (élément neutre) et $\bot \wedge B \equiv \bot$ (élément absorbant)
  - $\mathrm{B} \ \wedge B \equiv B$ (idempotence)

Equivalence logique remarquables

- **Négation**
  - $\neg\neg A \equiv A$
  - $\neg\bot \equiv \top$
  - $\neg\top \equiv \bot$
  - $A \vee \neg A \equiv \top$ (Tiers-exclus)
  - $A \wedge \neg A \equiv \bot$

Equivalence logique remarquables

- **Négation**
  - $\neg\neg A \equiv A$
  - $\neg\bot \equiv \top$
  - $\neg\top \equiv \bot$
  - $A \vee \neg A \equiv \top$ (Tiers-exclus)
  - $A \wedge \neg A \equiv \bot$
- **Lois de Morgan**
  - $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
  - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Equivalence logique remarquables

- **Distributivité**
  - $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- **Simplification**
  - $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
  - $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
  - $A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$

Equivalence logique remarquables

- **Implication et équivalence**
  - $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
  - $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
- Toute formule logique possède un **équivalent** ne reposant que sur les **connecteurs** $\neg$, $\wedge$ et $\vee$

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs ¬, ∧ et ∨ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

- **Exemple:**
  - $A \vee (\neg B \wedge C)$

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

- **Exemple:**
  - $A \vee (\neg B \wedge C)$ est une forme normale

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs ¬, ∧ et ∨ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

- **Exemple:**
  - $A \vee (\neg B \wedge C)$ est une forme normale
  - $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \wedge C)$

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

- **Exemple:**
  - $A \vee (\neg B \wedge C)$ est une forme normale
  - $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \wedge C)$ n'est pas une forme normale

Une forme normale ne peut contenir $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs ¬, ∧ et ∨ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

- **Exemple:**
  - $A \vee (\neg B \wedge C)$ est une forme normale
  - $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \wedge C)$ n'est pas une forme normale
  - $\neg(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C)$

Formes normales

- **Définition:** Une **forme normale** est une formule uniquement composée des connecteurs ¬, ∧ et ∨ pour laquelle la **négation ne s'applique qu'aux variables**

- **Exemple:**
  - $A \vee (\neg B \wedge C)$ est une forme normale
  - $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \wedge C)$ n'est pas une forme normale
  - $\neg(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C)$ n'est pas une forme normale

La négation ne peut s'appliquer qu'à des variables

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**
- **Définition:** Un **monôme** est la **conjonction** de **littéraux**

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**
- **Définition:** Un **monôme** est la **conjonction** de **littéraux**
- **Définition:** Une **clause** est la **disjonction** de **littéraux**

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**
- **Définition:** Un **monôme** est la **conjonction** de **littéraux**
- **Définition:** Une **clause** est la **disjonction** de **littéraux**

- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ un ensemble de variables

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**
- **Définition:** Un **monôme** est la **conjonction** de **littéraux**
- **Définition:** Une **clause** est la **disjonction** de **littéraux**

- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ un ensemble de variables
  - $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c$ sont des littéraux

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**
- **Définition:** Un **monôme** est la **conjonction** de **littéraux**
- **Définition:** Une **clause** est la **disjonction** de **littéraux**

- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ un ensemble de variables
  - $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c$ sont des littéraux
  - $a \wedge b, a \wedge \neg c, a \wedge \neg b \wedge \neg c$ sont des monômes

Formes normales

- **Définition:** Un **littéral** est une **variable** ou la **négation d'une variable**
- **Définition:** Un **monôme** est la **conjonction** de **littéraux**
- **Définition:** Une **clause** est la **disjonction** de **littéraux**

- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ un ensemble de variables
  - $a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c$ sont des littéraux
  - $a \wedge b, a \wedge \neg c, a \wedge \neg b \wedge \neg c$ sont des monômes
  - $a \vee b, a \vee \neg c, a \vee \neg b \vee \neg c$ sont des clauses

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$ est une CNF

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \land b$ est une CNF
  - $(a \lor \neg b \lor \neg c) \land (\neg d \lor e \lor f) \land a$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee f) \wedge a$ est une CNF

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee f) \wedge a$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \wedge (\neg a \vee e \vee f)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee f) \wedge a$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \wedge (\neg a \vee e \vee f)$ n'est pas une CNF

Une clause ne peut contenir de $\wedge$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee f) \wedge a$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \wedge (\neg a \vee e \vee f)$ n'est pas une CNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge e \wedge f)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Définition:** Une **forme normale conjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **conjonctions** de **clauses** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \wedge b$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee f) \wedge a$ est une CNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \wedge (\neg a \vee e \vee f)$ n'est pas une CNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge e \wedge f)$ n'est pas une CNF

Cette formule est une disjonction de monomes

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Intérêt:** Une forme normale conjonctive permet de faire apparaitre les contre-modèles de la formule

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale conjonctive** permet de faire apparaitre les **contre-modèles** de la formule

- **Exemple:** Soit $F: (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee a)$ une CNF

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale conjonctive** permet de faire apparaitre les **contre-modèles** de la formule

- **Exemple:** Soit F: $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee a)$ une CNF
  - Toute interprétation falsifiant $(a \vee \neg b \vee \neg c)$ est contre-modèle de F: $\{\neg a, b, c, \neg d, \neg e\}, \{\neg a, b, c, d, \neg e\}, \{\neg a, b, c, \neg d, e\}, \{\neg a, b, c, d, e\}$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale conjonctive** permet de faire apparaitre les **contre-modèles** de la formule

- **Exemple:** Soit F: $(a \lor \neg b \lor \neg c) \land (\neg d \lor e \lor a)$ une CNF
  - Toute interprétation falsifiant $(a \lor \neg b \lor \neg c)$ est contre-modèle de F:
    $\{\neg a, b, c, \neg d, \neg e\}, \{\neg a, b, c, d, \neg e\},$
    $\{\neg a, b, c, \neg d, e\}, \{\neg a, b, c, d, e\}$
  - Toute interprétation falsifiant $(\neg d \lor e \lor a)$ est contre-modèle de F:
    $\{\neg a, \neg b, \neg c, d, \neg e\}, \{\neg a, b, \neg c, d, \neg e\},$
    $\{\neg a, \neg b, c, d, \neg e\}, \{\neg a, b, c, d, \neg e\}$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Théorème:** **Toute** formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ **peut être exprimée** en **Forme Normale Conjonctive**

Forme Normale Conjonctive (CNF)

Algorithme:

entrée: une formule F
sortie: une formule en forme normale conjonctive

début
  remplacer $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ par leurs équivalences normales

  tanque F n'est pas une CNF **faire**
    pour chaque sous formule E de F **faire**
      si E est de la forme $\neg\neg X$ **alors** remplacer E par X **finsi**
      si E est de la forme $\neg(X \vee Y)$ **alors** remplacer E par $\neg X \wedge \neg Y$ **finsi**
      si E est de la forme $\neg(X \wedge Y)$ **alors** remplacer E par $\neg X \vee \neg Y$ **finsi**
      si E est de la forme $X \vee (Y \wedge Z)$ **alors** remplacer E par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ **finsi**
    finpour

    supprimer les sous-formules de valeur ⊤ ou ⊥
  fintq
fin

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \land (b \rightarrow c) \lor (\neg a \land d)$

  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \land (\neg b \lor c) \lor (\neg a \land d)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \land (b \rightarrow c) \lor (\neg a \land d)$
  - Remplacement de → et ↔

    F: $a \land (\neg b \lor c) \lor (\neg a \land d)$
  - Commutativité de ∨

    F: $(\neg a \land d) \lor a \land (\neg b \lor c)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee b) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$

  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Remplacement de → et ↔

    F: $a \wedge (\neg b \vee b) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Commutativité de ∨

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$

  - Priorité de ∧ sur ∨

    F: $(\neg a \wedge d) \vee (a \wedge (\neg b \vee c))$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big(a \wedge (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \land (b \rightarrow c) \lor (\neg a \land d)$
  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \land (\neg b \lor c) \lor (\neg a \land d)$
  - Commutativité de $\lor$

    F: $(\neg a \land d) \lor a \land (\neg b \lor c)$
  - Priorité de $\land$ sur $\lor$

    F: $(\neg a \land d) \lor \big(a \land (\neg b \lor c)\big)$
  - Remplacer $X \lor (Y \land Z)$ par $(X \lor Y) \land (X \lor Z)$

    F: $\big((\neg a \land d) \lor a\big) \land \big((\neg a \land d) \lor (\neg b \lor c)\big)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big(a \wedge (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    F: $\big((\neg a \wedge d) \vee a\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big(a \wedge (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    F: $\big((\neg a \wedge d) \vee a\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    F: $\big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    $F: (\neg a \wedge d) \vee \big(a \wedge (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((\neg a \wedge d) \vee a\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee \neg a\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee d\big)$

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((\neg a \wedge d) \vee a\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg a \wedge d) \vee (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee \neg a\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee d\big)$
  - Supprimer les formules de valeur $\top$

    $F: \big((\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee d\big)$ CNF stricte

Forme Normale Conjonctive (CNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee \neg a\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee d\big)$
  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    $F: \big((a \vee \neg a) \wedge (a \vee d)\big) \wedge \big((\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee d\big)$
  - Supprimer les formules de valeur T

    $F: \big((\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c)\big) \wedge \big((\neg b \vee c) \vee d\big)$ CNF stricte
  - Supprimer les parenthèses inutiles

    $F: (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$ CNF à priorité

Formes Normales

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - F peut s'écrire en CNF: $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$ est une DNF

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$ est une DNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg d \wedge e \wedge f) \wedge a$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$ est une DNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg d \wedge e \wedge f) \wedge a$ est une DNF

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$ est une DNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg d \wedge e \wedge f) \wedge a$ est une DNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge e \wedge f)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \lor b$ est une DNF
  - $(a \land \neg b \land \neg c) \lor (\neg d \land e \land f) \land a$ est une DNF
  - $(a \lor \neg b \land \neg c) \lor (\neg a \land e \land f)$ n'est pas une DNF

Un monôme ne peut contenir de $\lor$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une **forme normale disjonctive** est une formule sous **forme normale** composée **uniquement** de **disjonctions** de **monômes** ou de **littéraux**
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$ est une DNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg d \wedge e \wedge f) \wedge a$ est une DNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge e \wedge f)$ n'est pas une DNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee e \vee f)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Définition:** Une forme normale disjonctive est une formule sous forme normale composée uniquement de disjonctions de monômes ou de littéraux
- **Exemple:** Soit $\mathcal{P} = \{a, b, c, d, e, f\}$ un ensemble de variables
  - $a \vee b$ est une DNF
  - $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg d \wedge e \wedge f) \wedge a$ est une DNF
  - $(a \vee \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge e \wedge f)$ n'est pas une DNF
  - $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee e \vee f)$ n'est pas une DNF

Cette formule est une conjonction de clauses

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale disjonctive** permet de faire apparaitre les **modèles** de la formule

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale disjonctive** permet de faire apparaitre les **modèles** de la formule

- **Exemple:** Soit F: $(a \land \neg b \land \neg c) \lor (\neg d \land e \land a)$ une DNF

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale disjonctive** permet de faire apparaitre les **modèles** de la formule

- **Exemple:** Soit F: $(a \land \neg b \land \neg c) \lor (\neg d \land e \land a)$ une DNF
  - Toute interprétation satisfaisant $(a \land \neg b \land \neg c)$ est modèle de F: $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg e\}, \{a, \neg b, \neg c, d, \neg e\}$, $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, e\}, \{a, \neg b, \neg c, d, e\}$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Intérêt:** Une **forme normale disjonctive** permet de faire apparaitre les **modèles** de la formule

- **Exemple:** Soit $F: (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee e \vee a)$ une DNF
  - Toute interprétation satisfaisant $(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ est modèle de F: $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg e\}, \{a, \neg b, \neg c, d, \neg e\},$ $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, e\}, \{a, \neg b, \neg c, d, e\}$
  - Toute interprétation satisfaisant $(\neg d \vee e \vee a)$ est modèle de F: $\{a, \neg b, \neg c, \neg d, e\}, \{a, b, \neg c, \neg d, e\},$ $\{a, \neg b, c, \neg d, e\}, \{a, b, c, \neg d, e\}$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Théorème:** **Toute** formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ **peut être exprimée** en **Forme Normale Disjonctive**

Forme Normale Disjonctive (DNF)

Algorithme:

entrée: une formule F
sortie: une formule en forme normale conjonctive

début
remplacer $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ par leurs équivalences normales

tanque F n'est pas une DNF **faire**
pour chaque sous formule E de F **faire**
si E est de la forme $\neg\neg X$ **alors** remplacer E par X **finsi**
si E est de la forme $\neg(X \wedge Y)$ **alors** remplacer E par $\neg X \vee \neg Y$ **finsi**
si E est de la forme $\neg(X \vee Y)$ **alors** remplacer E par $\neg X \wedge \neg Y$ **finsi**
si E est de la forme $X \wedge (Y \vee Z)$ **alors** remplacer E par $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ **finsi**
finpour

supprimer les sous-formules de valeur $\top$ ou $\bot$
fintq
fin

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \land (b \rightarrow c) \lor (\neg a \land d)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Commutativité de $\vee$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \land (b \to c) \lor (\neg a \land d)$

  - Remplacement de $\to$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \land (\neg b \lor c) \lor (\neg a \land d)$

  - Commutativité de $\lor$

    F: $(\neg a \land d) \lor a \land (\neg b \lor c)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule $F\colon\ a \land (b \rightarrow c) \lor (\neg a \land d)$

  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    $F\colon\ a \land (\neg b \lor c) \lor (\neg a \land d)$

  - Commutativité de $\lor$

    $F\colon\ (\neg a \land d) \lor a \land (\neg b \lor c)$

  - Priorité de $\land$ sur $\lor$

    $F\colon\ (\neg a \land d) \lor \big(a \land (\neg b \lor c)\big)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \left(a \wedge (\neg b \vee c)\right)$
  - Remplacer $X \wedge (Y \vee Z)$ par $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Remplacement de $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

    F: $a \wedge (\neg b \vee c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$
  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big(a \wedge (\neg b \vee c)\big)$
  - Remplacer $X \wedge (Y \vee Z)$ par $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)\big)$ DNF stricte

Forme Normale Disjonctive (DNF)

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \to c) \vee (\neg a \wedge d)$

  - Commutativité de $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee a \wedge (\neg b \vee c)$

  - Priorité de $\wedge$ sur $\vee$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big(a \wedge (\neg b \vee c)\big)$

  - Remplacer $X \vee (Y \wedge Z)$ par $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

    F: $(\neg a \wedge d) \vee \big((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)\big)$

  - Supprimer les parenthèses inutiles

    F: $(\neg a \wedge d) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)$ DNF

Formes Normales

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - F peut s'écrire en CNF: $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$
  - F peut s'écrire en DNF: $(\neg a \wedge d) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)$

Formes Normales

- **Exemple:** Soit la formule F: $a \wedge (b \rightarrow c) \vee (\neg a \wedge d)$
  - F peut s'écrire en CNF: $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$
  - F peut s'écrire en DNF: $(\neg a \wedge d) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)$
- **Remarque:** Selon la syntaxe de la formule, la transformation en CNF ou DNF demande plus ou moins de remplacements

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

- **Forme générique:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

- **Forme générique:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$

- **Forme équivalente:**

$$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h \equiv (\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n) \vee h$$

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

- **Forme générique:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$

- **Forme équivalente:**

$$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h \equiv (\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n) \vee h$$
$$\equiv \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee h$$

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

- **Forme générique:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$

- **Forme équivalente:**

$$\begin{aligned}\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h &\equiv (\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n) \vee h \\ &\equiv \neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee h \\ &\equiv (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow h\end{aligned}$$

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

- **Forme générique:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$

- **Forme équivalente:**

$$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h \equiv (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow h$$

- **Signification:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$ signifie si p_1 et p_2 et … et p_n alors h

Clause de Horn

- **Définition:** Une **Forme Normale Disjonctive (DNF)** ne contenant que des littéraux dont **un seul est positif** est appelée **Clause de Horn**

- **Forme générique:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$

- **Forme équivalente:**
  $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h \equiv (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow h$

- **Signification:** $\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee h$ signifie si p_1 et p_2 et … et p_n alors h

- **Attention:** Il existe des formules $F \in \mathcal{L}_{p0}$ non représentables en clause de Horn

Propriétés de la logique propositionnelle

- **Décidabilité**: il existe un algorithme permettant de décider si une proposition ou un ensemble de propositions est satisfiable ou falsifiable
- **Cohérence**: il n'existe aucune proposition P telle que l'on puisse avoir en même temps P et $\neg P$
- **Calculabilité**: n'importe quelle formule est évaluable en un temps fini (même s'il est exponentiel)

Calcul

- Calculabilité ≠ faible complexité
- Calculer la satisfiabilité d'une formule
  - Problème SAT
  - NP-Complet
- Explosion combinatoire en fonction du nombre de variables

Solutions

- Simplifier les formules par des CNF / DNF pour les rendre plus facilement calculable