Intelligence Artificielle

Logique Propositionnelle

Raisonnement

Julien SEINTURIER
Maître de Conférences

Ensemble de formules

- **Définition:** Un **ensemble de formule** est un ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ défini tel que $\boldsymbol{\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}, F_i \in \mathcal{L}_{p0}, 1 \leq i \leq n}$

Ensemble de formules

- **Définition:** Un **ensemble de formule** est un ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ défini tel que $\boldsymbol{\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}, F_i \in \mathcal{L}_{p0}, 1 \le i \le n}$

Cohérence

- **Définition:** Un ensemble de formules Γ est dit **cohérent** s'il existe **au moins une** interprétation ω **satisfaisant toutes les formules** de Γ.

$$\exists \omega \in \Omega, \forall F \in \Gamma, \lfloor F \rfloor_\omega = vrai$$

Ensemble de formules

- **Définition:** Un **ensemble de formule** est un ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ défini tel que $\boldsymbol{\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}, F_i \in \mathcal{L}_{p0}, 1 \leq i \leq n}$

Cohérence

- **Définition:** Un ensemble de formules Γ est dit **cohérent** s'il existe **au moins une** interprétation ω **satisfaisant toutes les formules** de Γ.

$$\exists \omega \in \Omega, \forall F \in \Gamma, \lfloor F \rfloor_\omega = vrai$$

- **Définition:** Un ensemble de formules Γ est dit **incohérent** si **toute** interprétation ω **falsifie au moins une formule** de Γ.

$$\forall \omega \in \Omega, \exists F \in \Gamma, \lfloor F \rfloor_\omega = faux$$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules

Ω
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$
$\omega_1 = \{\ a, \neg b, \neg c\}$
$\omega_2 = \{\neg a,\ b, \neg c\}$
$\omega_3 = \{\ a,\ b, \neg c\}$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b,\ c\}$
$\omega_5 = \{\ a, \neg b,\ c\}$
$\omega_6 = \{\neg a,\ b,\ c\}$
$\omega_7 = \{\ a,\ b,\ c\}$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules

Ω	$a \vee b$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$
$\omega_1 = \{\ a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$
$\omega_2 = \{\neg a,\ b, \neg c\}$	$vrai$
$\omega_3 = \{\ a,\ b, \neg c\}$	$vrai$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b,\ c\}$	$faux$
$\omega_5 = \{\ a, \neg b,\ c\}$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a,\ b,\ c\}$	$vrai$
$\omega_7 = \{\ a,\ b,\ c\}$	$vrai$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules

Ω	$a \vee b$	$\neg a$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules

Ω	$a \vee b$	$\neg a$	$b \rightarrow c$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules

Ω	$a \vee b$	$\neg a$	$b \rightarrow c$	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$vrai$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$vrai$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules
  - ω_6 satisfait toutes les formules de Γ

Ω	$a \vee b$	$\neg a$	$b \rightarrow c$	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$vrai$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$vrai$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules
  - ω_6 satisfait toutes les formules de Γ
  - Γ est **cohérent**

Ω	$a \vee b$	$\neg a$	$b \rightarrow c$	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$vrai$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$vrai$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \rightarrow c, \neg b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \vee b, \neg a, b \to c, \neg b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules

Ω	$a \vee b$	$\neg a$	$b \to c$	$\neg b$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$

Exemple

- Soient $\Gamma = \{a \lor b, \neg a, b \rightarrow c, \neg b\}$ un ensemble de formules et Ω l'ensemble de ses interprétations
  - Evaluation des formules
  - Aucune interprétation ne satisfait toutes les formules de Γ
  - Γ est **incohérent**

Ω	$a \lor b$	$\neg a$	$b \rightarrow c$	$\neg b$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$vrai$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$	$faux$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$faux$	$vrai$	$faux$

Ensemble de formules

- **Equivalence:** L'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ **est équivalent sémantiquement** à la formule construite par la conjonction de toutes les formules de Γ:

$$\boldsymbol{\Gamma \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \,, 1 \leq i \leq n}$$

Ensemble de formules

- **Equivalence:** L'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ **est équivalent sémantiquement** à la formule construite par la conjonction de toutes les formules de Γ:

$$\boldsymbol{\Gamma \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \,, 1 \leq i \leq n}$$

- L'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ est **cohérent** **si et seulement si** il existe une interprétation $\omega \in \Omega$ telle que $\lfloor \bigwedge_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i} \rfloor_{\omega} = \boldsymbol{vrai}$

Ensemble de formules

- **Equivalence:** L'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ **est équivalent sémantiquement** à la formule construite par la conjonction de toutes les formules de Γ:

$$\boldsymbol{\Gamma \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \, , 1 \leq i \leq n}$$

- L'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ est **cohérent si et seulement si** il existe une interprétation $\omega \in \Omega$ telle que $\lfloor \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \rfloor_\omega = \boldsymbol{vrai}$

- L'ensemble de formules $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$ est **incohérent si et seulement si** pour toute interprétation $\omega \in \Omega$, $\lfloor \bigwedge_{i=1}^{n} F_i \rfloor_\omega = \boldsymbol{faux}$

Raisonnement

- La logique propositionnelle:
  - Permet de représenter formellement des énoncés et des propositions
  - Fourni un cadre formel pour la syntaxe et la sémantique des formules
  - Propose des outils pour évaluer la véracité de formules (CNF, DNF, …)

- Comment représenter le raisonnement ?

Conséquence logique

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est la **conséquence logique** d'un ensemble de formule Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vDash F}$, si et seulement si toute interprétation ω pour laquelle l'ensemble Γ est **cohérent satisfait** également F.

Conséquence logique

- **Définition:** Une formule $F \in \mathcal{L}_{p0}$ est la **conséquence logique** d'un ensemble de formule Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vDash F}$, si et seulement si toute interprétation ω pour laquelle l'ensemble Γ est **cohérent satisfait** également F. Plus formellement:

$$\boldsymbol{\Gamma \vDash F \text{ si et seulement si } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(F)}$$

Conséquence logique

- **Exemple:** Soit $\Gamma = \{a \wedge b, b \rightarrow c\}$ et $F: a \vee c$

Conséquence logique

- **Exemple:** Soit $\Gamma = \{a \wedge b, b \rightarrow c\}$ et $F: a \vee c$

Ω	$a \wedge b$	$b \rightarrow c$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_1 = \{ a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{ a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_5 = \{ a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_7 = \{ a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$

Conséquence logique

- **Exemple:** Soit $\Gamma = \{a \wedge b, b \rightarrow c\}$ et $F: a \vee c$
  - $Mod(\Gamma) = \{\omega_7\}$

Ω	$a \wedge b$	$b \rightarrow c$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$
$\boldsymbol{\omega_7 = \{a, b, c\}}$	$\boldsymbol{vrai}$	$\boldsymbol{vrai}$

Conséquence logique

- **Exemple:** Soit $\Gamma = \{a \wedge b, b \rightarrow c\}$ et $F: a \vee c$
  - $Mod(\Gamma) = \{\omega_7\}$
  - $Mod(F) = \{\omega_5, \omega_7\}$

Ω	$a \wedge b$	$b \rightarrow c$	$a \vee c$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$

Conséquence logique

- **Exemple:** Soit $\Gamma = \{a \wedge b, b \rightarrow c\}$ et $F: a \vee c$
  - $Mod(\Gamma) = \{\omega_7\}$
  - $Mod(F) = \{\omega_5, \omega_7\}$
  - $Mod(\Gamma) \subset Mod(F)$ donc $\boldsymbol{\Gamma} \vDash \boldsymbol{F}$

Ω	$a \wedge b$	$b \rightarrow c$	$a \vee c$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$

Conséquence logique

- **Exemple:** Soit $\Gamma = \{a \wedge b, b \rightarrow c\}$ et $F: a \vee c$
  - $Mod(\Gamma) = \{\omega_7\}$
  - $Mod(F) = \{\omega_5, \omega_7\}$
  - $Mod(\Gamma) \subset Mod(F)$ donc $\boldsymbol{\Gamma \vDash F}$
  - $\boldsymbol{F}$ **est une conséquence logique de** $\boldsymbol{\Gamma}$

Ω	$a \wedge b$	$b \rightarrow c$	$a \vee c$
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_1 = \{a, \neg b, \neg c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_2 = \{\neg a, b, \neg c\}$	$faux$	$faux$	$faux$
$\omega_3 = \{a, b, \neg c\}$	$vrai$	$faux$	$faux$
$\omega_4 = \{\neg a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_5 = \{a, \neg b, c\}$	$faux$	$vrai$	$vrai$
$\omega_6 = \{\neg a, b, c\}$	$faux$	$vrai$	$faux$
$\omega_7 = \{a, b, c\}$	$vrai$	$vrai$	$vrai$

Conséquence logique

- **Tautologie:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Si F est une **tautologie**, on peut alors écrire $\models \boldsymbol{F}$

Conséquence logique

- **Tautologie:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Si F est une **tautologie**, on peut alors écrire $\vDash \boldsymbol{F}$

- Une tautologie étant toujours vérifiée, elle ne nécessite aucune hypothèse et n'est donc conséquence de rien

Conséquence logique

- **Tautologie:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Si F est une **tautologie**, on peut alors écrire $\vDash \boldsymbol{F}$

- Une tautologie étant toujours vérifiée, elle ne nécessite aucune hypothèse et n'est donc conséquence de rien

- **Exemple:**
  - $a \vee \neg a$ **est une tautologie** et on peut écrire $\vDash \boldsymbol{a} \vee \neg \boldsymbol{a}$

Conséquence logique

- **Tautologie:** Soit $F \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Si F est une **tautologie**, on peut alors écrire $\vDash \boldsymbol{F}$

- Une tautologie étant toujours vérifiée, elle ne nécessite aucune hypothèse et n'est donc conséquence de rien

- **Exemple:**
  - $a \vee \neg a$ **est une tautologie** et on peut écrire $\vDash \boldsymbol{a} \vee \neg \boldsymbol{a}$
  - $a \vee b$ **n'est pas une tautologie** on ne peut pas écrire $\vDash a \vee b$

Conséquence logique

REVISION

- La conséquence logique est un **état logique** au vu des **interprétations**

Conséquence logique

REVISION

- La conséquence logique est un **état logique** au vu des **interprétations**
- Avoir $\Gamma \vDash F$ **ne signifie pas** que Γ prouve F

Conséquence logique

REVISION

- La conséquence logique est un **état logique** au vu des **interprétations**
- Avoir $\Gamma \vDash F$ **ne signifie pas** que Γ prouve F
- Une tautologie $\vDash F$ est vérifiée quelque-soit l'interprétation ω mais n'est pas démontrée

Conséquence logique

- La conséquence logique est un **état logique** au vu des **interprétations**
- Avoir $\Gamma \vDash F$ **ne signifie pas** que Γ prouve F
- Une tautologie $\vDash F$ est vérifiée quelque-soit l'interprétation w mais n'est pas démontrée

Qu'est-ce qu'une **preuve** et une **démonstration** ?

Déduction et preuve

- **Définition:** Une **règle de déduction** (ou **règle d'inférence**) autorise l'écriture d'une formule G à partir d'un ensemble de formules vérifiée $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_i, \dots, F_n\}$. La déduction (ou l'inférence) est notée:

$$\frac{\boldsymbol{F_1 \;\dots\; F_i \;\dots\; F_n}}{\boldsymbol{G}}$$

Déduction et preuve

- **Définition:** Une **règle de déduction** (ou **règle d'inférence**) autorise l'écriture d'une formule G à partir d'un ensemble de formules vérifiée $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n\}$. La déduction (ou l'inférence) est notée:

$$\frac{\boldsymbol{F_1 \;\ldots\; F_i \;\ldots\; F_n}}{\boldsymbol{G}}$$

- **Signification:** Si toutes les formules de $\mathcal{F}$ sont vraies, alors on peut en déduire G

Déduction et preuve

- **Définition:** Une **règle de déduction** (ou **règle d'inférence**) autorise l'écriture d'une formule G à partir d'un ensemble de formules vérifiée $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n\}$. La déduction (ou l'inférence) est notée:

$$\frac{\boldsymbol{F_1 \;\ldots\; F_i \;\ldots\; F_n}}{\boldsymbol{G}}$$

- **Signification:** Si toutes les formules de $\mathcal{F}$ sont vraies, alors on peut en déduire G

- **Notations**
  - $F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n$ sont appelées **prémisses**
  - G est appelée **conclusion**

Déduction et preuve

- **Définition:** Un **axiome** de la logique propositionnelle est une proposition qui bien que **non démontrée** est **toujours considérée comme vraie**.

Déduction et preuve

- **Définition:** Un **axiome** de la logique propositionnelle est une proposition qui bien que **non démontrée** est **toujours considérée comme vraie**.

- **Notation:** On appelle **schéma d'axiome** une formule $A \in \mathcal{L}_{p0}$ qui représente l'axiome

Déduction et preuve

- **Définition:** Un **axiome** de la logique propositionnelle est une proposition qui bien que **non démontrée** est **toujours considérée comme vraie**.

- **Notation:** On appelle **schéma d'axiome** une formule $A \in \mathcal{L}_{p0}$ qui représente l'axiome

- **Notation:** On appelle **instance d'axiome** une formule obtenue à partir d'un schéma d'axiome dans lequel les formules le composant ont été **substituées** par d'autre formules

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit l'axiome: A_1: « F *implique que* G *implique* F »

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit l'axiome: A_1: « F *implique que* G *implique* F »
  - $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ est un **schéma** de l'axiome A_1

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit l'axiome: A_1: « *F implique que G implique F* »
  - $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ est un schéma de l'axiome A_1
  - $(a \vee b) \rightarrow \big(\neg a \rightarrow (a \vee b)\big)$ est une instance de A_1

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit l'axiome: A_1: « F *implique que* G *implique* F »
  - $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ est un schéma de l'axiome A_1
  - $(a \vee b) \rightarrow \big(\neg a \rightarrow (a \vee b)\big)$ est une instance de A_1 obtenue en substituant dans le schéma de A_1:
    - F par $(a \vee b)$
    - G par $\neg a$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit l'axiome: A_1: « *F implique que G implique F* »
  - $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ est un schéma de l'axiome A_1
  - $(a \vee b) \rightarrow (\neg a \rightarrow (a \vee b))$ est une instance de A_1 obtenue en substituant dans le schéma de A_1:
    - F par $(a \vee b)$
    - G par $\neg a$

- En logique propositionnelle, on assimile les **axiomes** et leurs **schémas**

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'axiomes, soit G une formule et soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules.

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'axiomes, soit G une formule et soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules.

  On appelle **preuve** de G à partir de Γ une liste de formules $(C_1, \dots, C_j, \dots C_m, G)$ telle que pour tout $1 \leq j \leq m$, **au moins une** des conditions suivantes est vérifiée:

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\mathcal{A}$ **un ensemble d'axiomes**, soit G une formule et soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules.

  On appelle **preuve** de G à partir de Γ une liste de formules $\left(C_1, \dots, C_j, \dots C_m, G\right)$ telle que pour tout $1 \leq j \leq m$, **au moins une** des conditions suivantes est vérifiée:

  - C_j est l'**instance d'un axiome** $A \in \mathcal{A}$

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'axiomes, soit G une formule et soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules.

  On appelle preuve de G à partir de Γ une liste de formules $(C_1, \dots, C_j, \dots C_m, G)$ telle que pour tout $1 \leq j \leq m$, **au moins une** des conditions suivantes est vérifiée:

  - C_j est l'**instance d'un axiome** $A \in \mathcal{A}$
  - $C_j \in \Gamma$

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'axiomes, soit G une formule et soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules.

  On appelle **preuve** de G à partir de Γ une liste de formules $\left(C_1, \dots, C_j, \dots C_m, G\right)$ telle que pour tout $1 \leq j \leq m$, **au moins une** des conditions suivantes est vérifiée:

  - C_j est l'**instance d'un axiome** $A \in \mathcal{A}$
  - $C_j \in \Gamma$
  - C_j est obtenue par **application d'une règle de déduction** dont les prémisses sont $(C_k, \dots, C_l), 1 \leq k \leq l < j$

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'axiomes, soit G une formule et soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules.

  On appelle **preuve** de G à partir de Γ une liste de formules $(C_1, \dots, C_j, \dots C_m, G)$ telle que pour tout $1 \leq j \leq m$, **au moins une** des conditions suivantes est vérifiée:

  - C_j est l'**instance d'un axiome** $A \in \mathcal{A}$
  - $C_j \in \Gamma$
  - C_j est obtenue par **application d'une règle de déduction** dont les prémisses sont $(C_k, \dots, C_l), 1 \leq k \leq l < j$

- **Notation:** $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ est appelé **ensemble des hypothèses**

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ un ensemble d'axiomes avec:
  - $A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
  - $A_2 : \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ un ensemble d'axiomes avec:
  - $A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
  - $A_2 : \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$

  Soit $\Gamma = \{H_1, H_2\}$ un ensemble de formules avec:
  - $H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
  - $H_2 : Q$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ un ensemble d'axiomes avec:
  - $A_1 : \varphi \to \psi \to \varphi$
  - $A_2 : \big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)$

  Soit $\Gamma = \{H_1, H_2\}$ un ensemble de formules avec:
  - $H_1 : P \to (Q \to R)$
  - $H_2 : Q$

  Soit la règle de déduction $r : \dfrac{\tau \quad \tau \to \pi}{\pi}$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ un ensemble d'axiomes avec:
  - $A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
  - $A_2: \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$

  Soit $\Gamma = \{H_1, H_2\}$ un ensemble de formules avec:
  - $H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
  - $H_2: Q$

  Soit la règle de déduction $r: \dfrac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$

  Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

On ne dispose pour cela que des axiomes, des hypothèses et de la règle de déduction

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: \left(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\right) \rightarrow \left((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\right)$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

C_1: $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Utilisation de H_1

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \to R$

$A_1 : \varphi \to \psi \to \varphi$
$A_2 : (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
$H_1 : P \to (Q \to R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \to \pi}{\pi}$$

$C_1 :\ P \to (Q \to R)$
$C_2 : (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

Instanciation de A_2 en substituant:

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1 :\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2 : (P \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((P \rightarrow \psi) \rightarrow (P \rightarrow \chi))$

Instanciation de A_2 en substituant:
φ par P

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: (P \rightarrow (Q \rightarrow \chi)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \chi))$

Instanciation de A_2 en substituant:
φ par P
ψ par Q

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

Instanciation de A_2 en substituant:
φ par P
ψ par Q
χ par R

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2 : (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3 :$

Application de r à C_1 et C_2:

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \to R$

$A_1: \varphi \to \psi \to \varphi$
$A_2: \big(\varphi \to (\psi \to \chi)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\big)$
$H_1: P \to (Q \to R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \to \pi}{\pi}$$

C_1: $P \to (Q \to R)$
C_2: $\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)$
C_3: $(P \to Q) \to (P \to R)$

Application de r à C_1 et C_2:

$$r: \frac{P \to (Q \to R) \qquad \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)}{(P \to Q) \to (P \to R)}$$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \to R$

$A_1: \varphi \to \psi \to \varphi$
$A_2: (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
$H_1: P \to (Q \to R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \to \pi}{\pi}$$

$C_1: P \to (Q \to R)$
$C_2: (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
$C_3: (P \to Q) \to (P \to R)$
$C_4: \varphi \to \psi \to \varphi$

Instanciation de A_1 en substituant:

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow \psi \rightarrow Q$

Instanciation de A_1 en substituant:
φ par Q

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1 :\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2 : (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3 : (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4 : Q \rightarrow P \rightarrow Q$

Instanciation de A_1 en substituant:
φ par Q
ψ par P

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big) \rightarrow \big((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)\big)$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5: Q$

Utilisation de H_2

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \to R$

$A_1: \varphi \to \psi \to \varphi$
$A_2: \left(\varphi \to (\psi \to \chi)\right) \to \left((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\right)$
$H_1: P \to (Q \to R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \to \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \to (Q \to R)$
$C_2: \left(P \to (Q \to R)\right) \to \left((P \to Q) \to (P \to R)\right)$
$C_3: (P \to Q) \to (P \to R)$
$C_4: Q \to P \to Q$
$C_5: Q$
$C_6:$

Application de r à C_5 et C_4:

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5: Q$
$C_6: P \rightarrow Q$

Application de r à C_5 et C_4:

$$r: \frac{Q \qquad Q \rightarrow (P \rightarrow Q)}{(P \rightarrow Q)}$$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5: Q$
$C_6: P \rightarrow Q$
$C_7:$

Application de r à C_6 et C_3:

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5: Q$
$C_6: P \rightarrow Q$
$C_7: P \rightarrow R$

Application de r à C_6 et C_3:

$$r: \frac{P \rightarrow Q \qquad (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)}{(P \rightarrow R)}$$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2 : (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3 : (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4 : Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5 : Q$
$C_6 : P \rightarrow Q$
$C_7 : P \rightarrow R$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2 : (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
$C_3 : (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4 : Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5 : Q$
$C_6 : P \rightarrow Q$
$C_7 : P \rightarrow R$

$\{C_1, C_5\} \in \Gamma$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: \left(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\right) \rightarrow \left((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\right)$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: \left(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\right) \rightarrow \left((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)\right)$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5: Q$
$C_6: P \rightarrow Q$
$C_7: P \rightarrow R$

$\{C_1, C_5\} \in \Gamma$
C_2 et C_4 sont des instances d'axiomes

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \to R$

$A_1: \varphi \to \psi \to \varphi$
$A_2: \left(\varphi \to (\psi \to \chi)\right) \to \left((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)\right)$
$H_1: P \to (Q \to R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \to \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \to (Q \to R)$
$C_2: \left(P \to (Q \to R)\right) \to \left((P \to Q) \to (P \to R)\right)$
$C_3: (P \to Q) \to (P \to R)$
$C_4: Q \to P \to Q$
$C_5: Q$
$C_6: P \to Q$
$C_7: P \to R$

$\{C_1, C_5\} \in \Gamma$
C_2 et C_4 sont des instances d'axiomes
C_3, C_6 et C_7 résultent de l'application de r

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash \boldsymbol{P \rightarrow R}$

$A_1: \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2: \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$
$H_1: P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2: Q$

$$r: \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1:\ P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2: \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big) \rightarrow \big((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)\big)$
$C_3: (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4: Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5: Q$
$C_6: P \rightarrow Q$
$\boldsymbol{C_7: P \rightarrow R}$

$\{C_1, C_5\} \in \Gamma$
C_2 et C_4 sont des instances d'axiomes
C_3, C_6 et C_7 résultent de l'application de r
$\boldsymbol{C_7 = P \rightarrow R}$

Déduction et preuve

- **Exemple:** Démontrer que $\Gamma \vdash P \rightarrow R$

$A_1 : \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$
$A_2 : \big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big) \rightarrow \big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\big)$
$H_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$H_2 : Q$

$$r : \frac{\tau \quad \tau \rightarrow \pi}{\pi}$$

$C_1 : P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
$C_2 : \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big) \rightarrow \big((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)\big)$
$C_3 : (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$C_4 : Q \rightarrow P \rightarrow Q$
$C_5 : Q$
$C_6 : P \rightarrow Q$
$C_7 : P \rightarrow R$

$\{C_1, C_5\} \in \Gamma$
C_2 et C_4 sont des instances d'axiomes
C_3, C_6 et C_7 résultent de l'application de r
$C_7 = P \rightarrow R$

$(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7)$ est une **preuve** de $P \rightarrow R$ par Γ

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules et G une formule. La formule G est **prouvable** par Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vdash G}$, s'il existe une **preuve** de G à partir de Γ.

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules et G une formule. La formule G est **prouvable** par Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vdash G}$, s'il existe une **preuve** de G à partir de Γ.

  - Les formules $\boldsymbol{H_i \in \Gamma}$ sont appelées **hypothèses**

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules et G une formule. La formule G est **prouvable** par Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vdash G}$, s'il existe une **preuve** de G à partir de Γ.

  - Les formules $\boldsymbol{H_i \in \Gamma}$ sont appelées **hypothèses**
  - L'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ peut être vide

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules et G une formule. La formule G est **prouvable** par Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vdash G}$, s'il existe une **preuve** de G à partir de Γ.

  - Les formules $\boldsymbol{H_i \in \Gamma}$ sont appelées **hypothèses**
  - L'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ peut être vide

- **Définition:** Une formule G est un **théorème**, noté $\vdash \boldsymbol{G}$, si G est prouvable sans nécessiter d'hypothèses

Déduction et preuve

- **Définition:** Soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules et G une formule. La formule G est **prouvable** par Γ, noté $\boldsymbol{\Gamma \vdash G}$, s'il existe une **preuve** de G à partir de Γ.
  - Les formules $\boldsymbol{H_i \in \Gamma}$ sont appelées **hypothèses**
  - L'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ peut être vide
- **Définition:** Une formule G est un **théorème**, noté $\vdash \boldsymbol{G}$, si G est prouvable sans nécessiter d'hypothèses
- **Notations:** La notation $\vdash \boldsymbol{G}$ signifie que G est **prouvable**, **prouvé**, **démontrable** ou encore **démontré**

Déduction et preuve

- Différences entre les concepts

Déduction et preuve

- Différences entre les concepts
  - La conséquence logique $\models$ repose sur la capacité à évaluer des formules pour toutes les interprétations

Déduction et preuve

- Différences entre les concepts
  - La conséquence logique $\models$ repose sur la capacité à évaluer des formules pour toutes les interprétations
  - La prouvabilité $\vdash$ repose sur la construction d’une formule à partir d’un ensemble d’axiome et d’hypothèses, sans tenir compte des interprétations

Déduction et preuve

- Différences entre les concepts
  - La conséquence logique $\models$ repose sur la capacité à évaluer des formules pour toutes les interprétations
  - La prouvabilité $\vdash$ repose sur la construction d'une formule à partir d'un ensemble d'axiome et d'hypothèses, sans tenir compte des interprétations
- Différence entre implication et conséquence logique

Déduction et preuve

- Différences entre les concepts
  - La conséquence logique $\models$ repose sur la capacité à évaluer des formules pour toutes les interprétations
  - La prouvabilité $\vdash$ repose sur la construction d'une formule à partir d'un ensemble d'axiome et d'hypothèses, sans tenir compte des interprétations
- Différence entre implication et conséquence logique
  - $A \models B$ **signifie que** $Mod(A) \subset Mod(B)$

Déduction et preuve

- Différences entre les concepts
  - La conséquence logique $\vDash$ repose sur la capacité à évaluer des formules pour toutes les interprétations
  - La prouvabilité $\vdash$ repose sur la construction d'une formule à partir d'un ensemble d'axiome et d'hypothèses, sans tenir compte des interprétations
- Différence entre implication et conséquence logique
  - $A \vDash B$ **signifie que** $Mod(A) \subset Mod(B)$
  - $A \rightarrow B$ **est vraie** si $Mod(A) \subset Mod(B)$ **mais aussi si** $Mod(B) \neq Mod(A)$

Déduction et preuve

- Réaliser des preuves nécessite un **cadre** qui contient:

Déduction et preuve

- Réaliser des preuves nécessite un **cadre** qui contient:
  - Des règles d'écriture de formules
  - Un ensemble d'axiomes
  - Un ensemble de règles de déduction

Déduction et preuve

- Réaliser des preuves nécessite un **cadre** qui contient:
  - Des règles d'écriture de formules
  - Un ensemble d'axiomes
  - Un ensemble de règles de déduction

- **Intuition:** Le choix des axiomes et des règles de déductions va donner différentes propriétés aux preuves obtenues

Déduction et preuve

- Réaliser des preuves nécessite un **cadre** qui contient:
  - Des règles d'écriture de formules
  - Un ensemble d'axiomes
  - Un ensemble de règles de déduction

- **Intuition:** Le choix des axiomes et des règles de déductions donne différentes propriétés aux preuves

Comment **formaliser** un tel cadre ?

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle
  - $\mathcal{L}_{p0}$ est l'ensemble des formules propositionnelles

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle
  - $\mathcal{L}_{p0}$ est l'ensemble des formules propositionnelles
  - $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{p0}$ est un ensemble de formules servant d'axiomes

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle
  - $\mathcal{L}_{p0}$ est l'ensemble des formules propositionnelles
  - $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{p0}$ est un ensemble de formules servant d'axiomes
  - $\mathcal{R}$ est un ensemble de règles de déduction de la forme

$$\mathcal{R} = \{r_i\}\ avec\ r_i\colon \frac{f_1 \ \dots\ f_j \ \dots\ f_n}{g}, f_j \in \mathcal{L}_{p0} et\ g \in \mathcal{L}_{p0}$$

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle
  - $\mathcal{L}_{p0}$ est l'ensemble des formules propositionnelles
  - $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{p0}$ est un ensemble de formules servant d'axiomes
  - $\mathcal{R}$ est un ensemble de règles de déduction de la forme

$$\mathcal{R} = \{r_i\}\ avec\ r_i\colon \frac{f_1\ \dots\ f_j\ \dots\ f_n}{g}, f_j \in \mathcal{L}_{p0} et\ g \in \mathcal{L}_{p0}$$

- Créer un système formel pour la logique c'est:

Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle
  - $\mathcal{L}_{p0}$ est l'ensemble des formules propositionnelles
  - $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{p0}$ est un ensemble de formules servant d'axiomes
  - $\mathcal{R}$ est un ensemble de règles de déduction de la forme

$$\mathcal{R} = \{r_i\}\ avec\ r_i\text{:}\ \frac{f_1\ \dots\ f_j\ \dots\ f_n}{g}, f_j \in \mathcal{L}_{p0} et\ g \in \mathcal{L}_{p0}$$

- Créer un système formel pour la logique c'est:
  - Choisir l'ensemble de formules servant d'axiomes

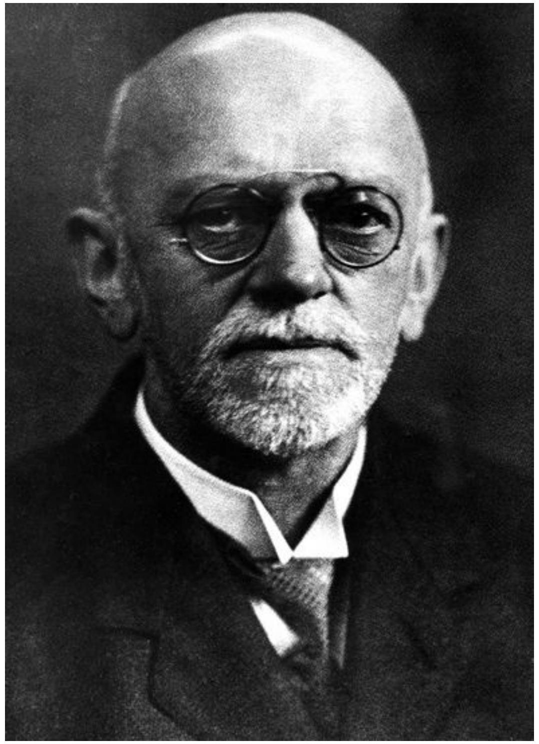
Système formel

- **Définition:** Un système formel propositionnel est un tuple $\langle \mathcal{V}, \mathcal{L}_{p0}, \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ tel que:
  - $\mathcal{V}$ est le vocabulaire de la logique propositionnelle
  - $\mathcal{L}_{p0}$ est l'ensemble des formules propositionnelles
  - $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}_{p0}$ est un ensemble de formules servant d'axiomes
  - $\mathcal{R}$ est un ensemble de règles de déduction de la forme

$$\mathcal{R} = \{r_i\}\ avec\ r_i: \frac{f_1\ \dots\ f_j\ \dots\ f_n}{g}, f_j \in \mathcal{L}_{p0} et\ g \in \mathcal{L}_{p0}$$

- Créer un système formel pour la logique c'est:
  - Choisir l'ensemble de formules servant d'axiomes
  - Définir une ou plusieurs règles de déduction

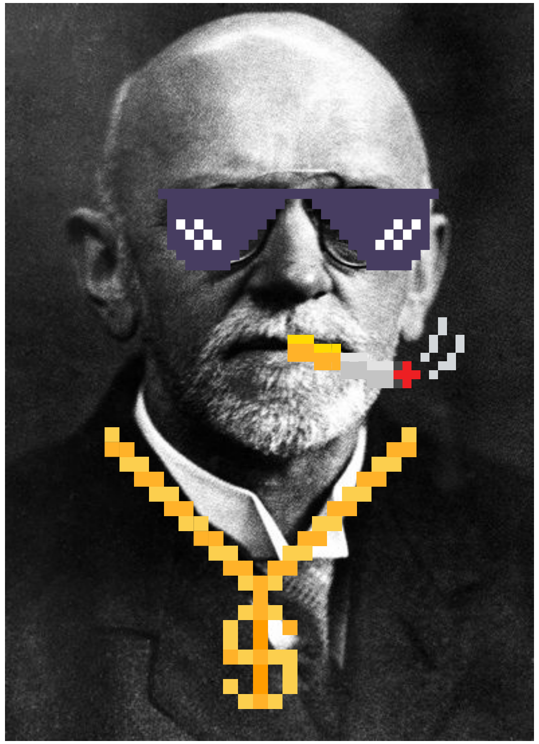
Système à la Hilbert



Système à la Hilbert

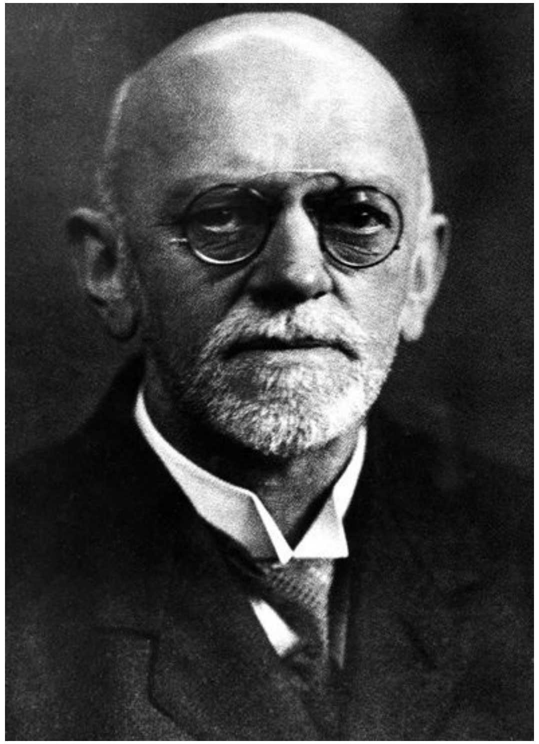
- Défini par **David Hilbert**

The David Hilbert



Système à la Hilbert

- Défini par **David Hilbert**
  - But de validation de théorèmes
  - Nombreux axiomes
  - Une seule règle de déduction
- Repose entièrement sur de la réécriture (syntaxe)



Système à la Hilbert

- **Axiomes**
  - (i) $\vdash A \to (B \to A)$ (tautologie ou K)
  - (ii) $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$ (syllogisme ou S)

Les deux axiomes originaux

Système à la Hilbert

- **Axiomes**
  - (i) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (tautologie ou K)
  - (ii) $\vdash \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$ (syllogisme ou S)
  - (iii) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Contraposition)

Système à la Hilbert

- **Axiomes**
  - (i) $\vdash A \to (B \to A)$ (tautologie ou K)
  - (ii) $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$ (syllogisme ou S)
  - (iii) $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (Contraposition)
  - (iv) $\vdash (A \land B) \to A$ et $(A \land B) \to B$
  - (v) $\vdash A \to \big(B \to (A \land B)\big)$

Axiomes pour la conjonction

Système à la Hilbert

- **Axiomes**
  - (i) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (tautologie ou K)
  - (ii) $\vdash \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$ (syllogisme ou S)
  - (iii) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Contraposition)
  - (iv) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$ et $(A \wedge B) \rightarrow B$
  - (v) $\vdash A \rightarrow \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)$
  - (vi) $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$ et $B \rightarrow (A \vee B)$
  - (vii) $\vdash (A \vee B) \rightarrow \Big((A \rightarrow C) \rightarrow \big((B \rightarrow C)\big) \rightarrow C\Big)$

Axiomes pour la disjonction

Système à la Hilbert

- **Axiomes**
  - (i) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (tautologie ou K)
  - (ii) $\vdash \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$ (syllogisme ou S)
  - (iii) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Contraposition)
  - (iv) $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$ et $(A \wedge B) \rightarrow B$
  - (v) $\vdash A \rightarrow \big(B \rightarrow (A \wedge B)\big)$
  - (vi) $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$ et $B \rightarrow (A \vee B)$
  - (vii) $\vdash (A \vee B) \rightarrow \Big((A \rightarrow C) \rightarrow \big((B \rightarrow C)\big) \rightarrow C\Big)$
  - $(viii)$ $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ Double négation

Système à la Hilbert

- **Règle de déduction**
  - Modus Ponens

$$\frac{\vdash A \quad \vdash (A \to B)}{\vdash B}$$

  - Si A est démontré et si A $\to$ B est démontré, alors B est démontré

Système à la Hilbert

- **Propriétés des axiomes**
  - Seuls les axiomes K et S sont nécessaires
  - Tous les axiomes hormis K et S sont **démontrables** à partir de K et S

Système à la Hilbert

- **Propriétés des axiomes**
  - Seuls les axiomes K et S sont nécessaires
  - Tous les axiomes hormis K et S sont **démontrables** à partir de K et S
- **Exemple:** Démontrer $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Système à la Hilbert

- **Propriétés des axiomes**
  - Seuls les axiomes K et S sont nécessaires
  - Tous les axiomes hormis K et S sont **démontrables** à partir de K et S
- **Exemple:** Démontrer $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Les démonstrations dans ce système formel sont longues et complexes

Système à la Hilbert

- **Propriétés des axiomes**
  - Seuls les axiomes K et S sont nécessaires
  - Tous les axiomes hormis K et S sont **démontrables** à partir de K et S

- **Exemple:** Démontrer $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Un ensemble d'outils complètent le Système Formel à la Hilbert pour simplifier son utilisation

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction**: Pour toutes formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \rightarrow \psi)}$

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction:** Pour toutes formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \rightarrow \psi)}$

- **Développement:**

  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \rightarrow \psi)$

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction:** Pour toutes formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)}$

- **Développement:**

  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)$

  si et seulement si $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \vdash \left(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)\right)$

Nouvelle application du théorème de déduction

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction:** Pour toutes formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)}$

- **Développement:**

  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)$

  si et seulement si $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \vdash \left(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)\right)$

  …

  si et seulement si $\vdash \left(\varphi_1 \to \left(\dots \to (\varphi_n \to \psi)\right)\right)$

Application du théorème de déduction tant qu'il y a des hypothèses

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction:** Pour toutes formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $$\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi} \text{ **si et seulement si** } \boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)}$$

- **Développement:**

  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \left(\varphi_1 \to (\dots \to (\varphi_n \to \psi))\right)$

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction**: Pour toutes formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\boldsymbol{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)}$

- **Développement:**

  $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \left(\varphi_1 \to (\ldots \to (\varphi_n \to \psi))\right)$

- **Notation avec priorités:**

  $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \varphi_1 \to \cdots \to \varphi_n \to \psi$

Système à la Hilbert

- **Théorème de déduction:** Pour toutes formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \rightarrow \psi)}$

- **Développement:**

  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \left(\varphi_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \psi))\right)$

- **Notation avec priorités:**

  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \varphi_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \varphi_n \rightarrow \psi$

- **Cas de 2 formules:** Pour toutes formules $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{p0}$:

  $\varphi \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash (\varphi \rightarrow \psi)$

Système à la Hilbert

- **Théorème de correction**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule:

  Si $\vdash \varphi$ alors $\vDash \varphi$

Système à la Hilbert

- **Théorème de correction**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule:

  Si $\vdash \varphi$ alors $\vDash \varphi$

  « *Tout théorème est une tautologie* »

Système à la Hilbert

- **Théorème de correction**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule:

  Si $\vdash \varphi$ alors $\vDash \varphi$

  « *Tout théorème est une tautologie* »

- **Théorème de complétude**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule.

  Si $\vDash \varphi$ alors $\vdash \varphi$

Système à la Hilbert

- **Théorème de correction**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule:

  Si $\vdash \varphi$ alors $\vDash \varphi$

  « *Tout théorème est une tautologie* »

- **Théorème de complétude**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule.

  Si $\vDash \varphi$ alors $\vdash \varphi$

  « *Toute tautologie est un théorème* »

Système à la Hilbert

- **Théorème de correction**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule:

  Si $\vdash \varphi$ alors $\models \varphi$

  « *Tout théorème est une tautologie* »

- **Théorème de complétude**: Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule.

  Si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$

  « *Toute tautologie est un théorème* »

- Dans le **système formel à la Hilbert** il y a **équivalence** entre **syntaxe** et **sémantique**

  $$\vdash \boldsymbol{\varphi} \equiv \models \boldsymbol{\varphi}$$

Système Formel

- Permet la déduction via des axiomes et des règles
- Complet (équivalence syntaxe / sémantique)
- Fastidieux à utiliser ou à automatiser

Système Formel

- Permet la déduction via des axiomes et des règles
- Complet (équivalence syntaxe / sémantique)
- Fastidieux à utiliser ou à automatiser

Méthode des Tableaux

- Permet de faire des déductions de façon graphique
- Adapté pour une utilisation manuelle
- Automatisable

Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Exemple:**

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\alpha \wedge \beta\}$$

$$\{\varphi \vee \beta, \alpha \rightarrow \psi\} \qquad \{\beta\}$$

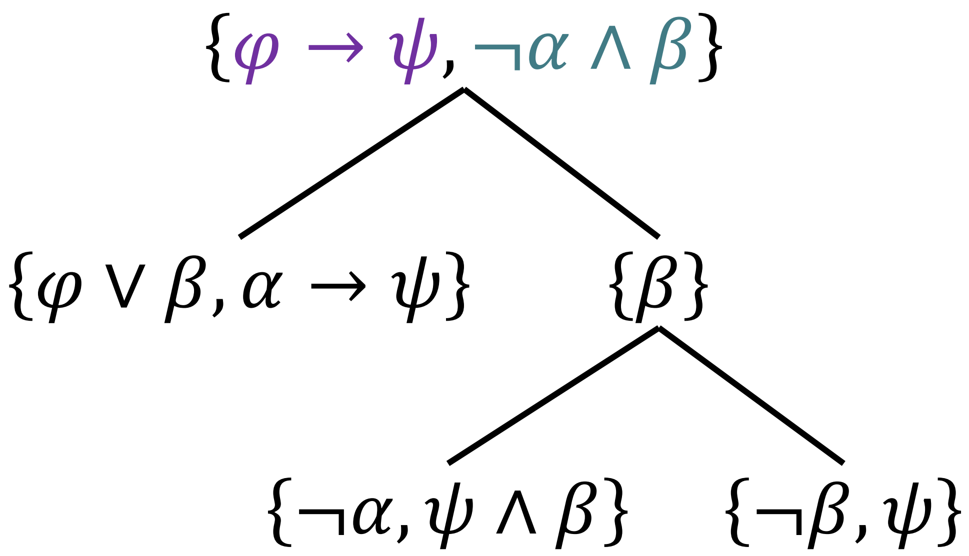
$$\{\neg\alpha, \psi \wedge \beta\} \qquad \{\neg\beta, \psi\}$$

Pas de contraintes entre les nœuds

Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

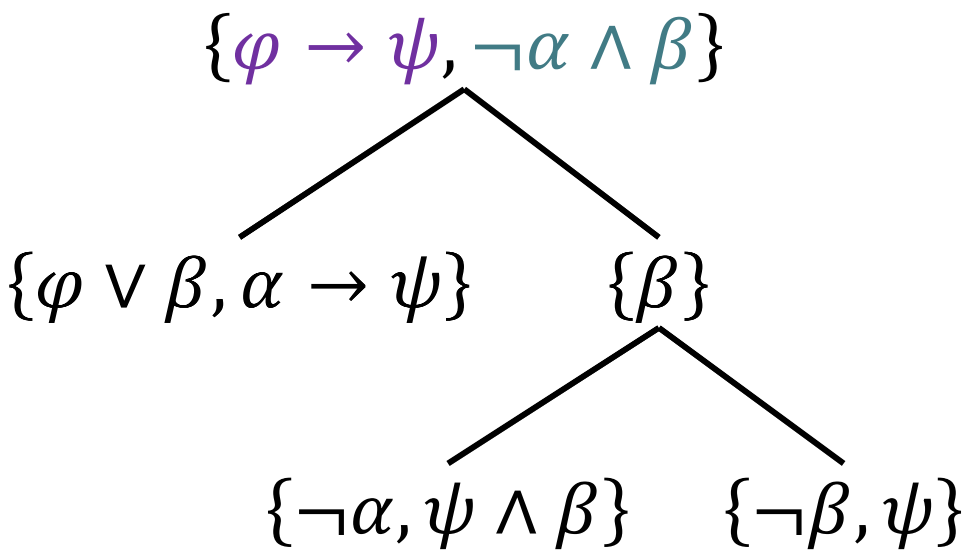
- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne



Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne

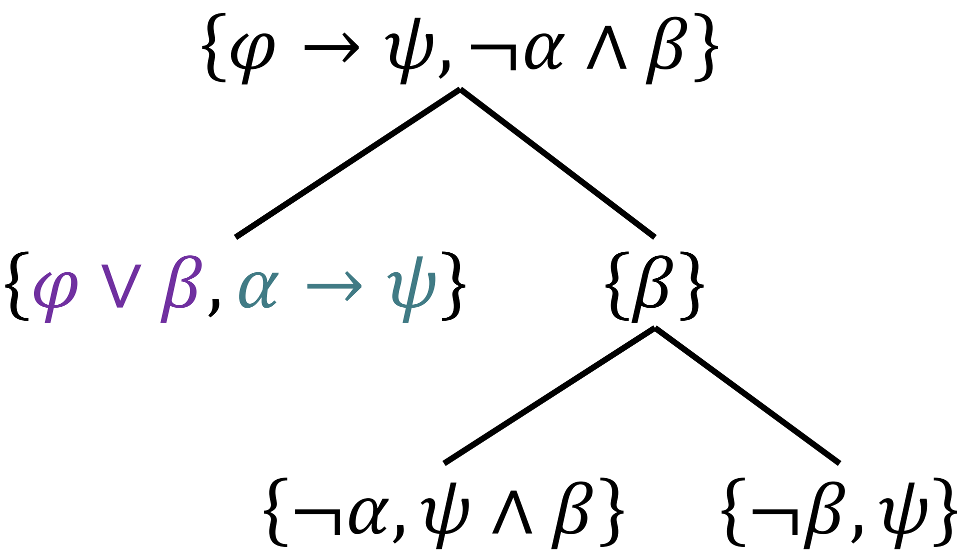


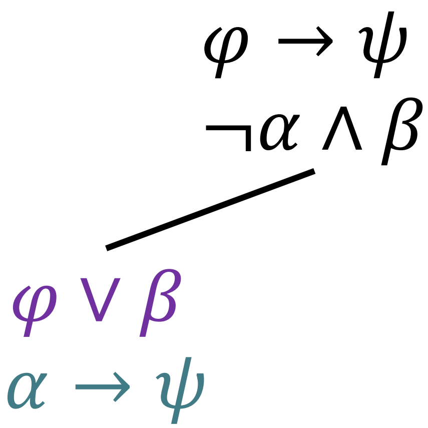
$\varphi \to \psi$
$\neg\alpha \land \beta$

Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne

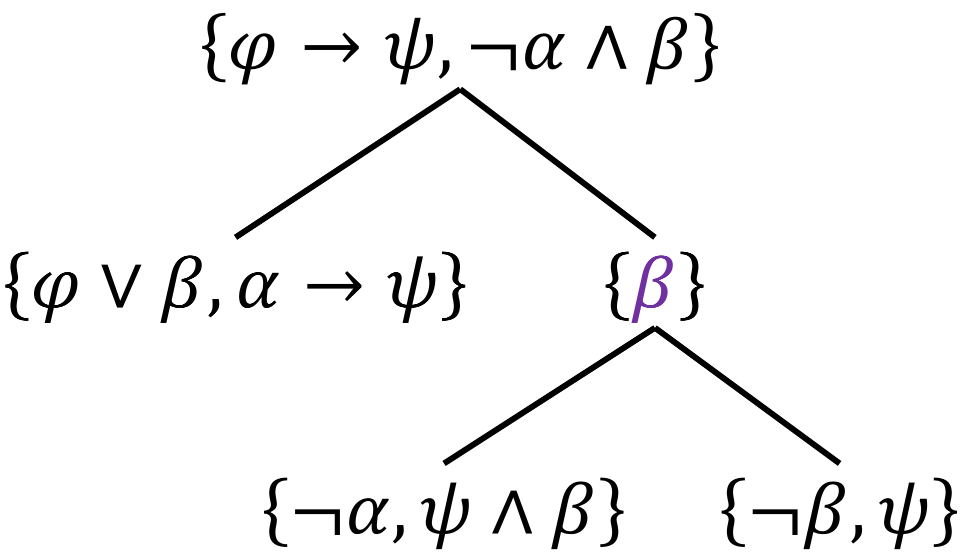


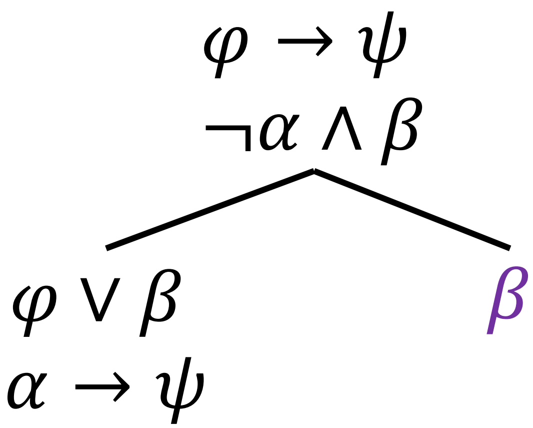


Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne

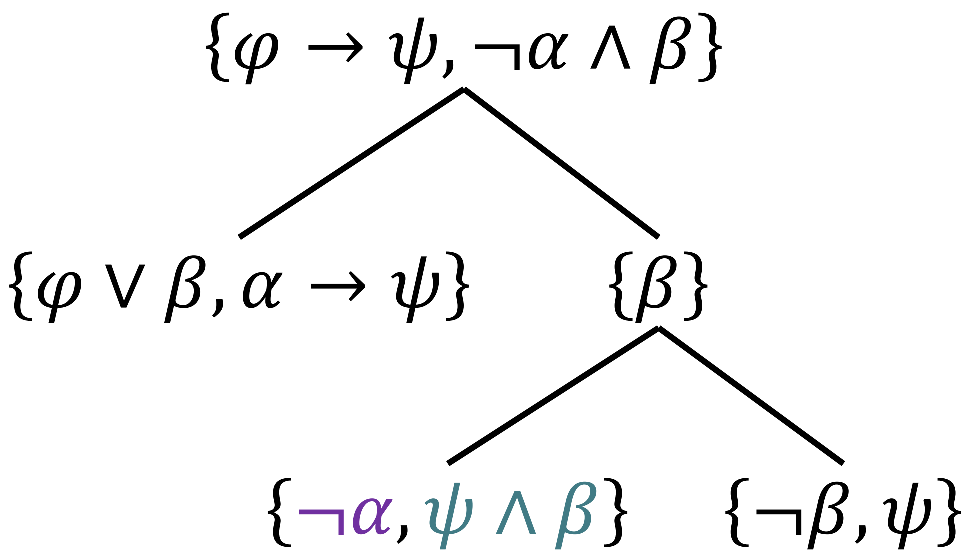


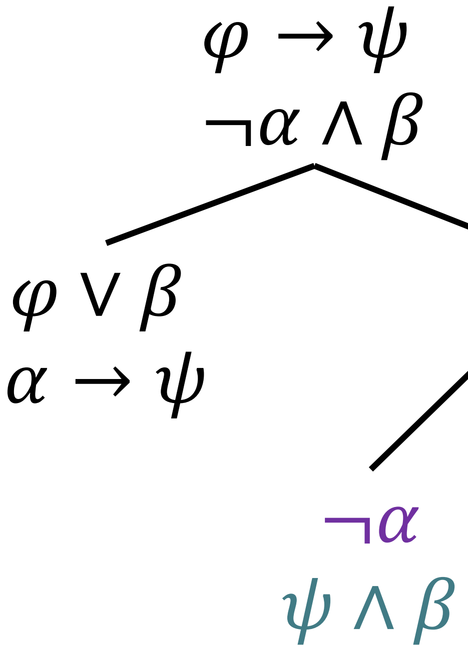


Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d’un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne

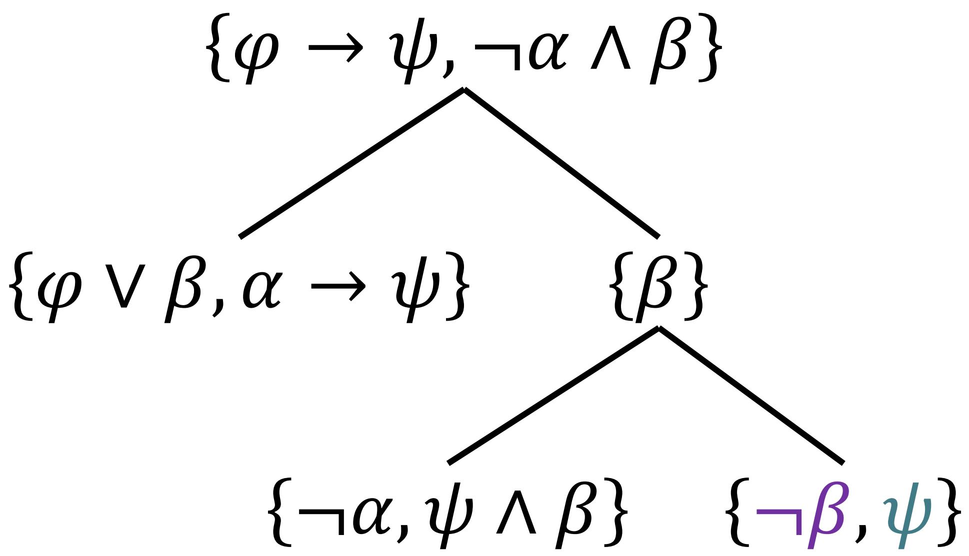


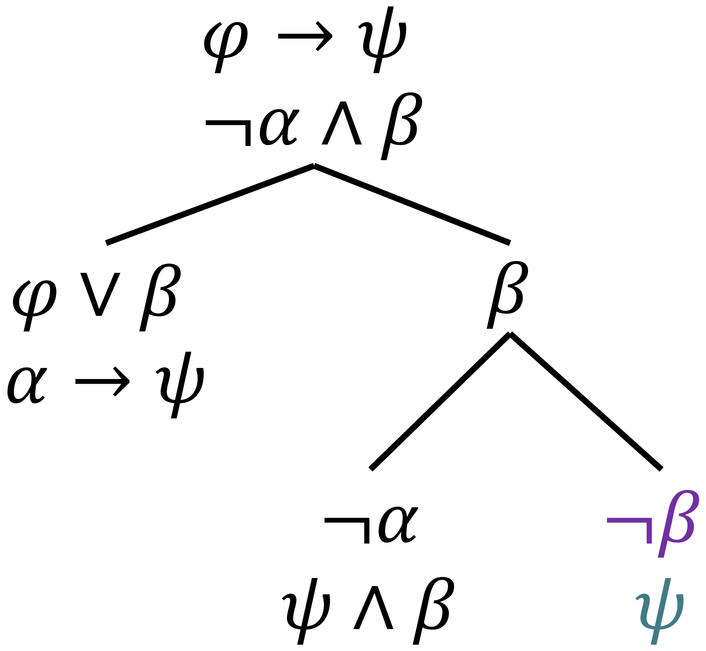


Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne

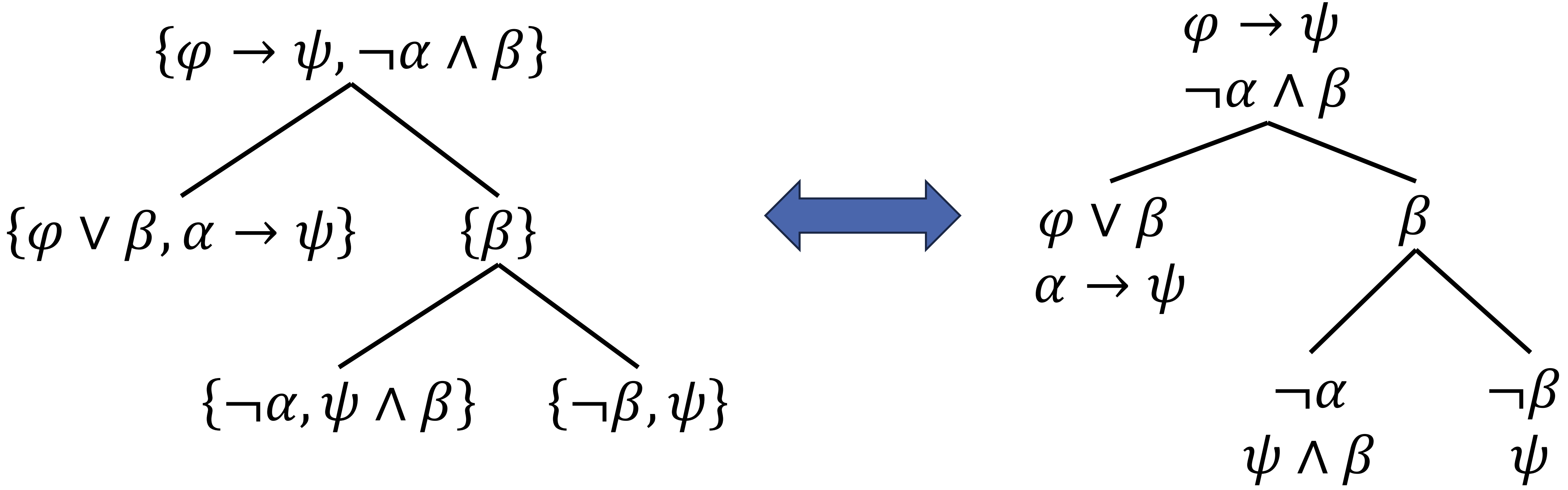




Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre de formules** tout arbre dont les **nœuds** sont composés **d'un ensemble de formules de $\mathcal{L}_{p0}$**

- **Notation:** Par convention les ensembles sont écrits ligne par ligne



Méthode des Tableaux

- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Un arbre de formules possède une branche fermée si elle contient à la fois φ et $\neg\varphi$

Méthode des Tableaux

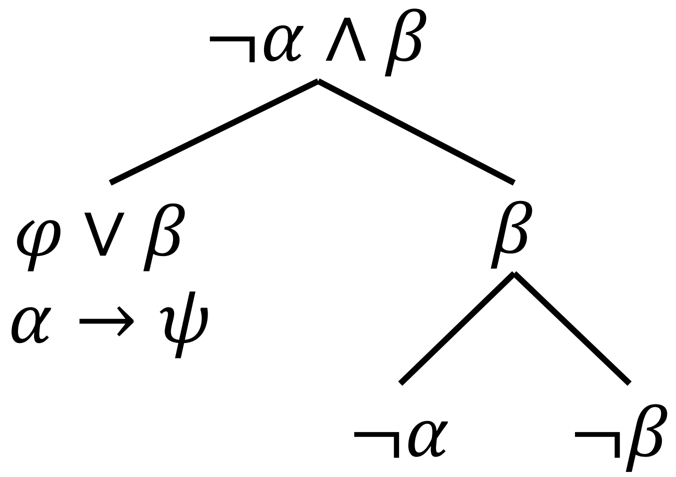
- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Un arbre de formules possède une branche fermée si elle contient à la fois φ et $\neg\varphi$

- **Notation:** Lorsqu'un arbre de formules possède une branche fermée, celle-ci est complétée par une feuille $\otimes$

Méthode des Tableaux

- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Un arbre de formules possède une branche fermée si elle contient à la fois φ et $\neg\varphi$

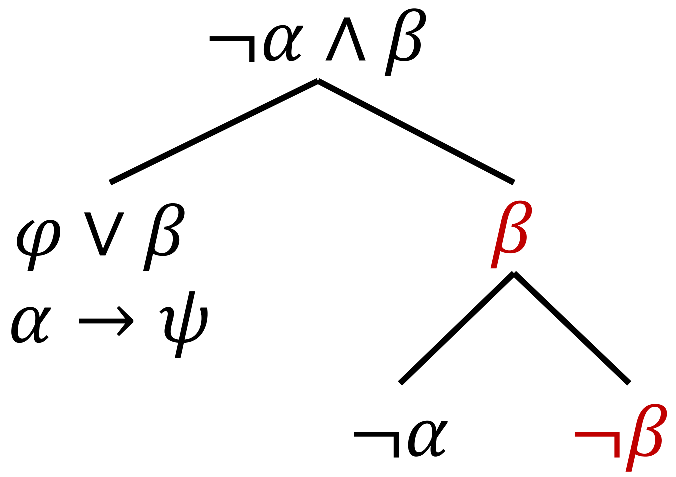
- **Notation:** Lorsqu'un arbre de formules possède une branche fermée, celle-ci est complétée par une feuille $\otimes$



Méthode des Tableaux

- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Un arbre de formules possède une branche fermée si elle contient à la fois φ et $\neg\varphi$

- **Notation:** Lorsqu'un arbre de formules possède une branche fermée, celle-ci est complétée par une feuille $\otimes$

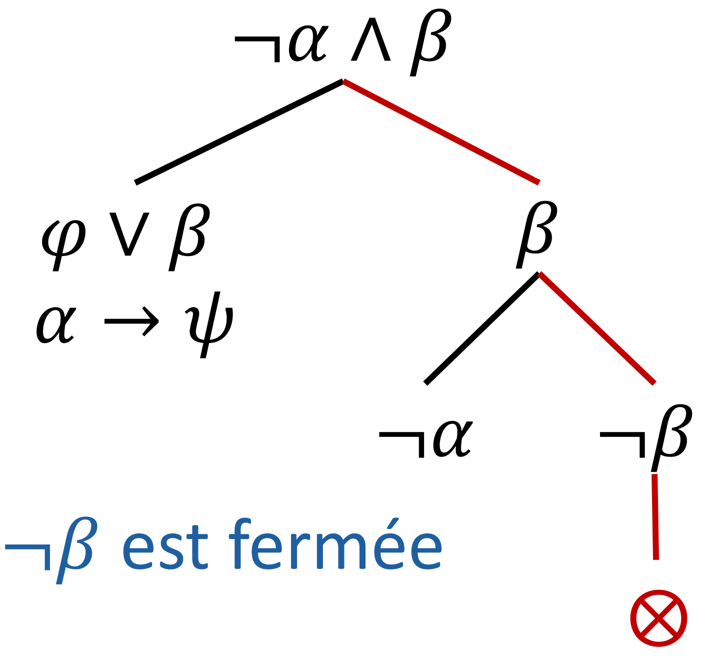


La branche contenant β et $\neg\beta$ est fermée

Méthode des Tableaux

- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. Un arbre de formules possède une branche fermée si elle contient à la fois φ et $\neg\varphi$

- **Notation:** Lorsqu'un arbre de formules possède une branche fermée, celle-ci est complétée par une feuille $\otimes$



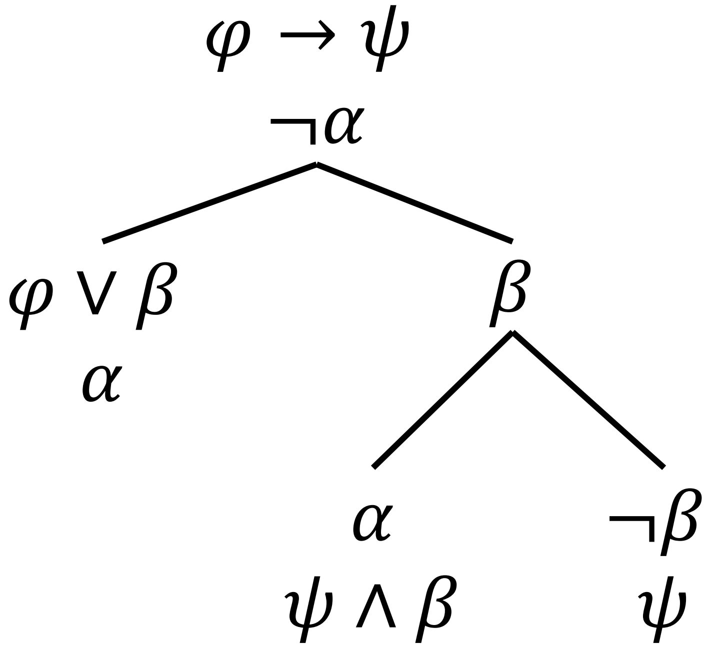
La branche contenant β et $\neg\beta$ est fermée

Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre fermé** un arbre de formules dont **toutes les branches sont fermées**

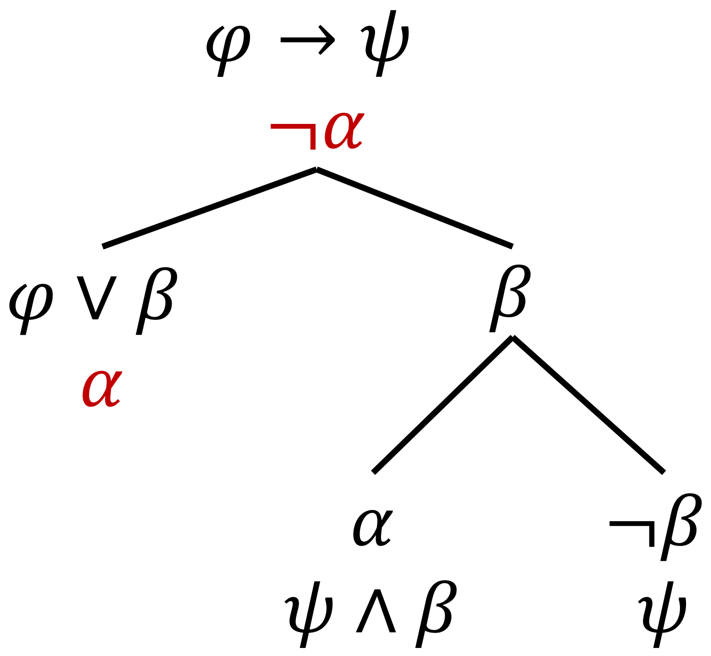
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle arbre fermé un arbre de formules dont toutes les branches sont fermées



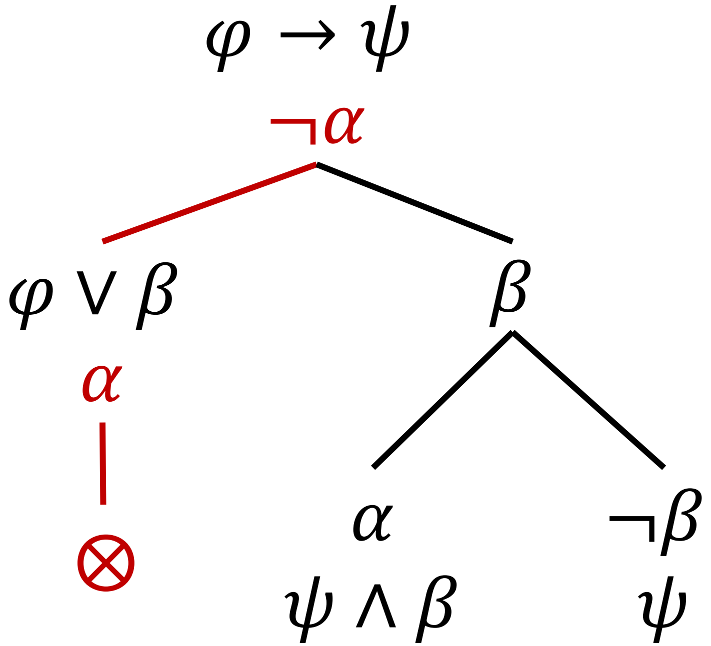
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre fermé** un arbre de formules dont **toutes les branches sont fermées**



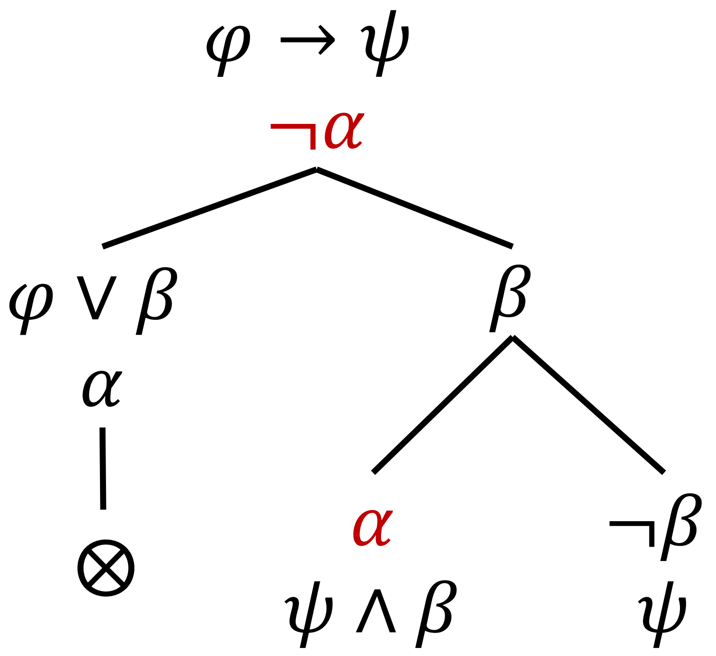
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle arbre fermé un arbre de formules dont toutes les branches sont fermées



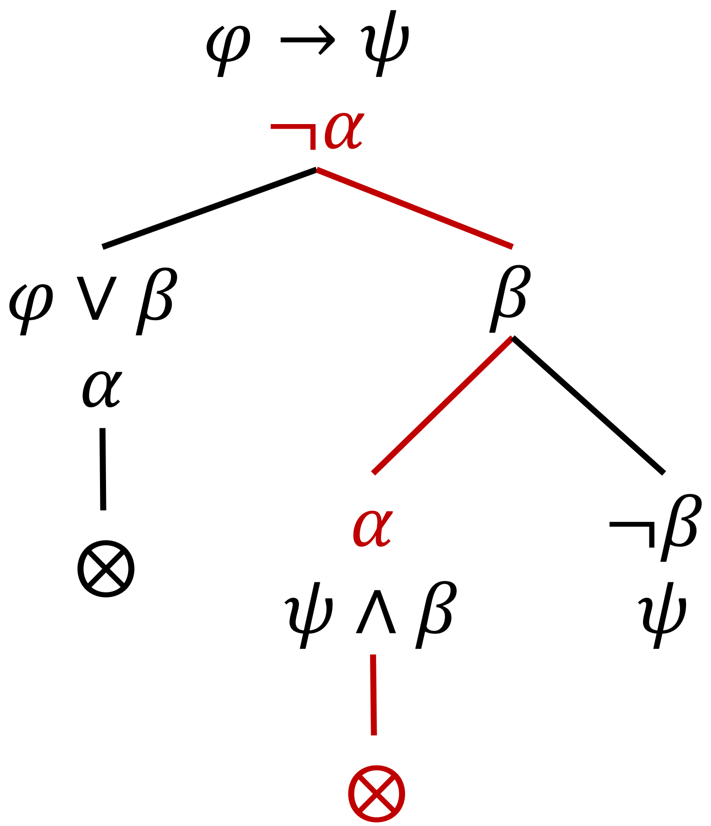
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle arbre fermé un arbre de formules dont toutes les branches sont fermées



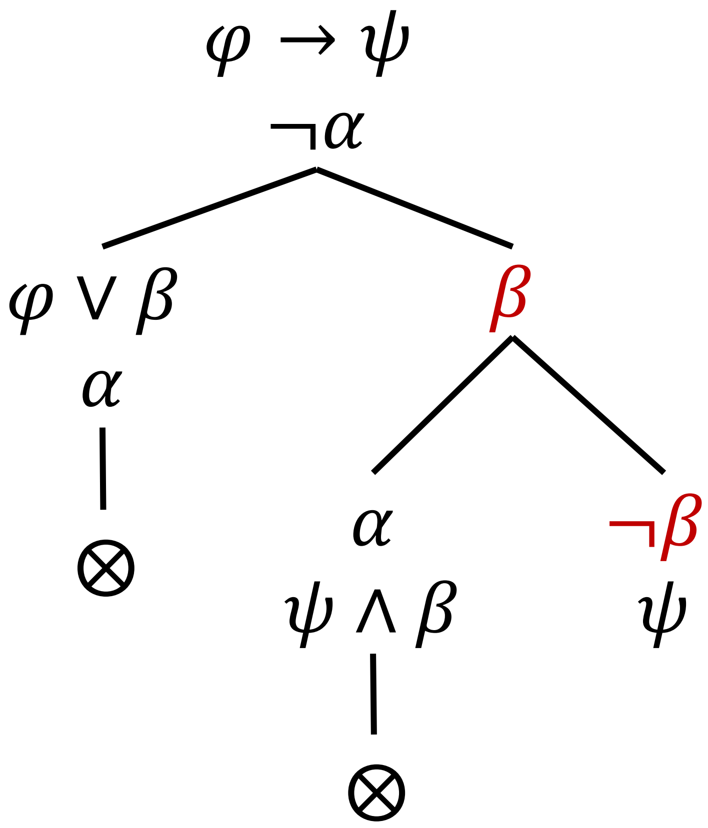
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre fermé** un arbre de formules dont **toutes les branches sont fermées**



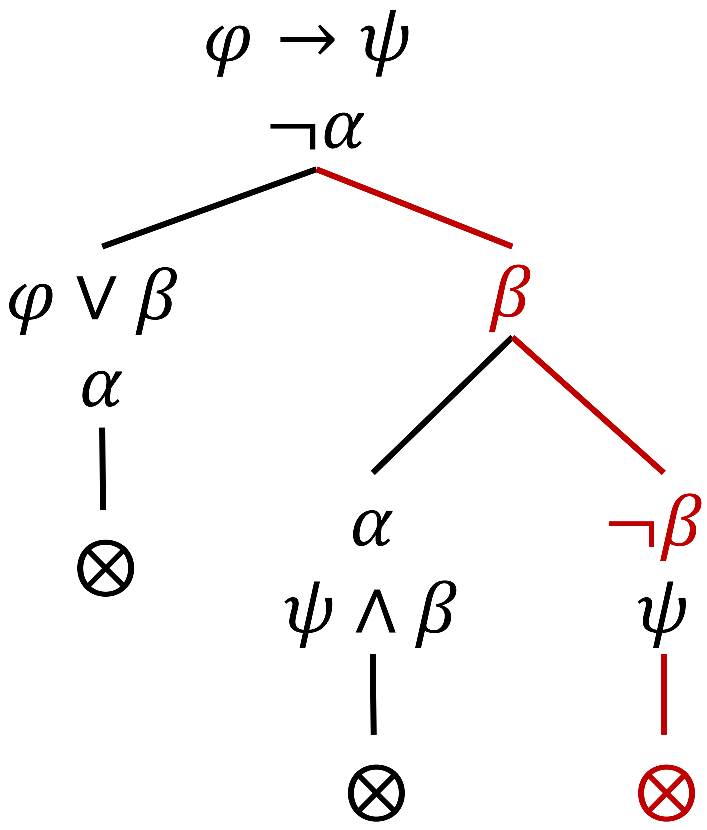
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle arbre fermé un arbre de formules dont toutes les branches sont fermées



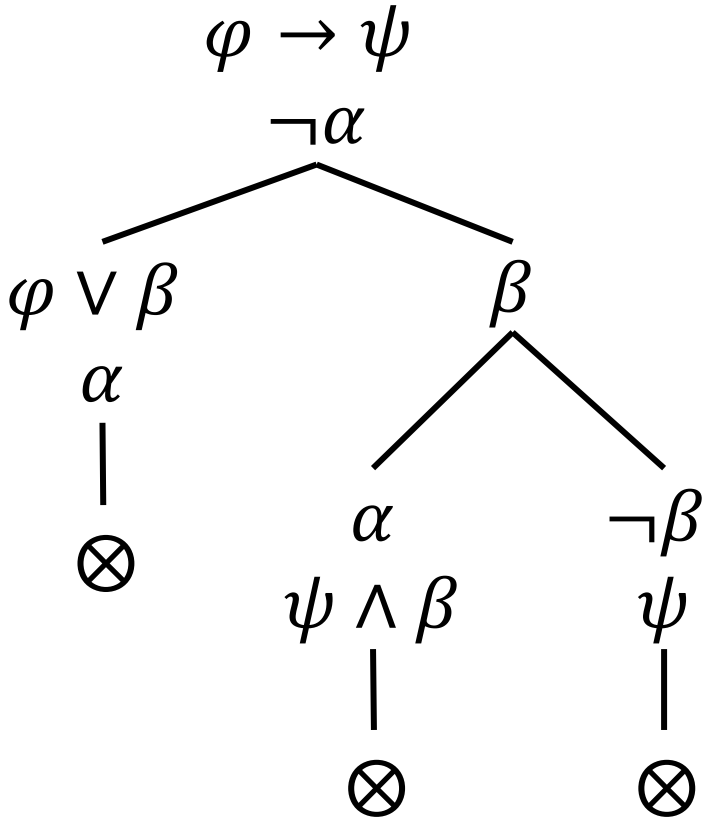
Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre fermé** un arbre de formules dont **toutes les branches sont fermées**



Méthode des Tableaux

- **Définition:** On appelle **arbre fermé** un arbre de formules dont **toutes les branches sont fermées**



L'arbre est fermé

Méthode des Tableaux

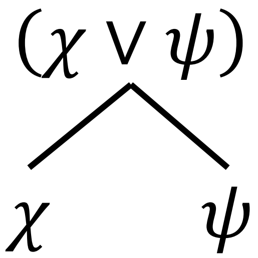
- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. On appelle **règle** une application, notée $\boldsymbol{R}$, qui permet de créer un **arbre de formules** à partir de φ

Méthode des Tableaux

- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. On appelle **règle** une application, notée $\boldsymbol{R}$, qui permet de créer un **arbre de formules** à partir de φ

- **Exemple:**

R:



Crée un arbre à partir de la formule φ: $(\chi \vee \psi)$

Méthode des Tableaux

- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. On appelle **règle** une application, notée $\boldsymbol{R}$, qui permet de créer un **arbre de formules** à partir de φ

- **Exemple:**

R: $(\chi \vee \psi)$

χ $\quad$ ψ

R: $\chi \rightarrow \psi$

$\chi \vee \beta$ $\quad$ β

$\alpha \rightarrow \psi$

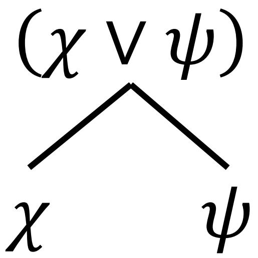
Crée un arbre à partir de la formule φ: $(\chi \rightarrow \psi)$

Méthode des Tableaux

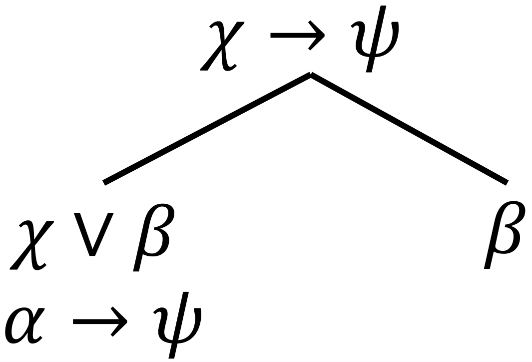
- **Définition:** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{p0}$ une formule. On appelle **règle** une application, notée ***R***, qui permet de créer un **arbre de formules** à partir de φ

- **Exemple:**

R:



R:



Les nœuds des arbres créés n’ont pas nécessairement de lien avec la formule d’origine

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$(\varphi \land \psi)$$

$$|$$

$$\varphi$$

$$\psi \qquad R_\land$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c} (\varphi \wedge \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array} \quad R_{\wedge}$$

$$\varphi, \psi \vDash (\varphi \wedge \psi)$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c} (\varphi \wedge \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array} \quad R_\wedge \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & (\varphi \vee \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \psi \end{array} \quad R_\vee$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c} (\varphi \land \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array} \quad R_\land$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \lor \psi) & \\ \varphi & & \psi \end{array} \quad R_\lor$$

$$\varphi \vDash (\varphi \lor \psi)$$
$$\psi \vDash (\varphi \lor \psi)$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c} (\varphi \land \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array} \quad R_\land \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & (\varphi \lor \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \psi \end{array} \quad R_\lor \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & (\varphi \to \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\varphi & & \psi \end{array} \quad R_\to$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$(\varphi \wedge \psi)$

φ

ψ $\quad R_{\wedge}$

$(\varphi \vee \psi)$

$\varphi \qquad \psi$ $\quad R_{\vee}$

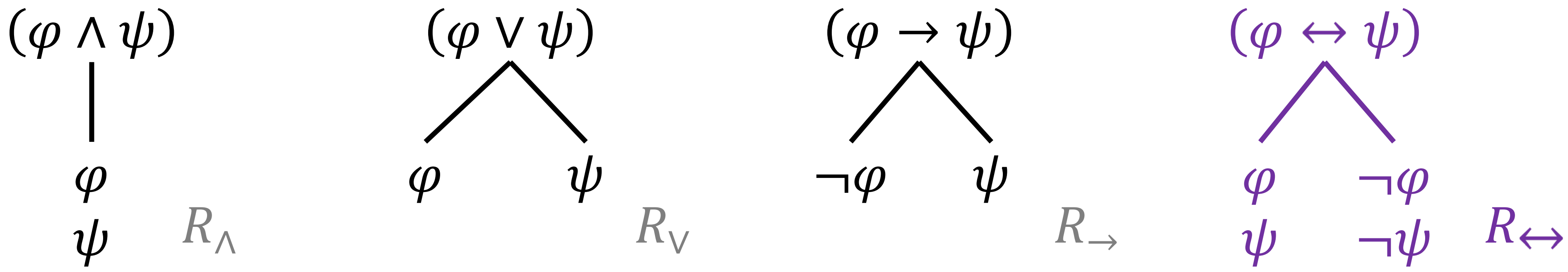
$(\varphi \rightarrow \psi)$

$\neg\varphi \qquad \psi$ $\quad R_{\rightarrow}$

$$\neg\varphi \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$$
$$\psi \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.



Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

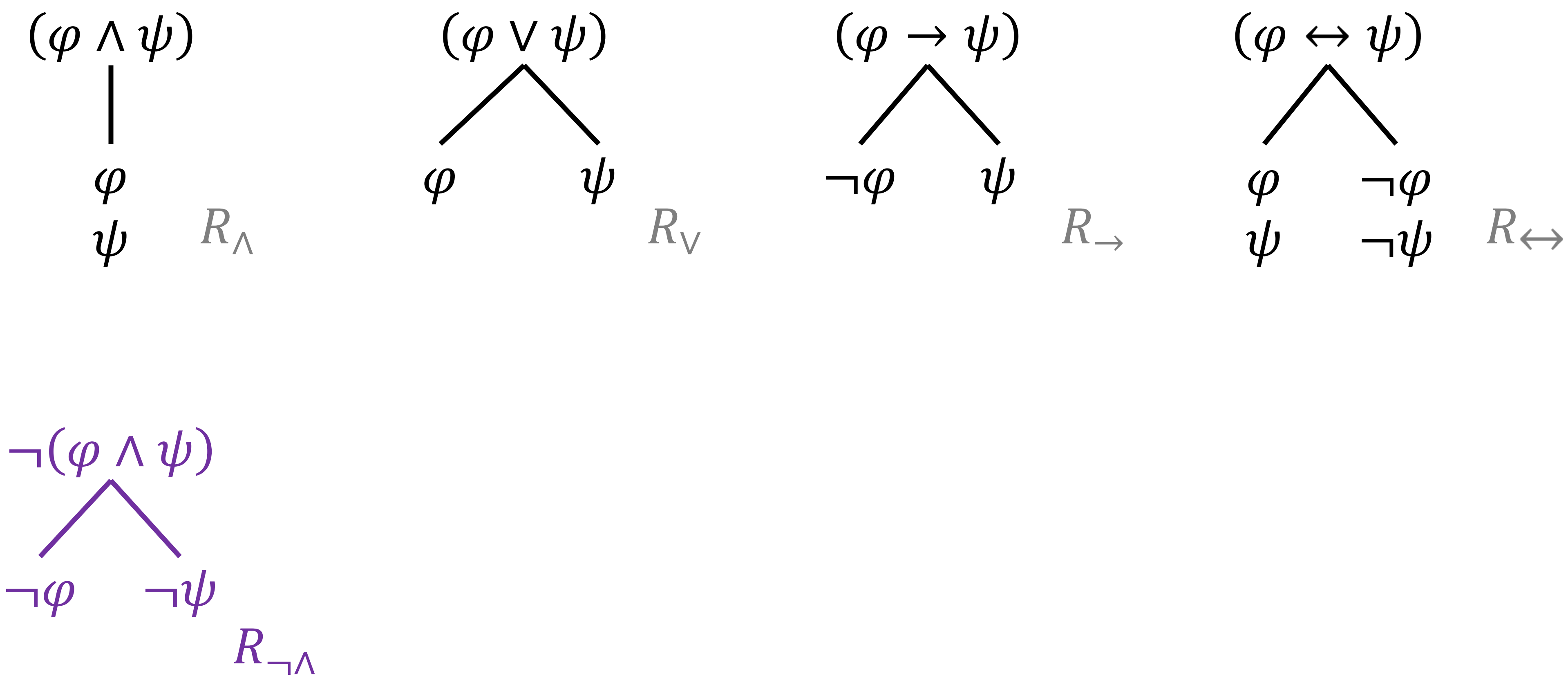
$$\begin{array}{c}(\varphi \wedge \psi)\\ | \\ \varphi \\ \psi\end{array} \quad R_{\wedge} \qquad \begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \vee \psi)}\\ / & \backslash \\ \varphi & \psi\end{array} \quad R_{\vee} \qquad \begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \rightarrow \psi)}\\ / & \backslash \\ \neg\varphi & \psi\end{array} \quad R_{\rightarrow} \qquad \begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \leftrightarrow \psi)}\\ / & \backslash \\ \varphi & \neg\varphi \\ \psi & \neg\psi\end{array} \quad R_{\leftrightarrow}$$

$$\varphi, \psi \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.



Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c} (\varphi \land \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array} \quad R_{\land}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \lor \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \psi \end{array} \quad R_{\lor}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \rightarrow \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\varphi & & \psi \end{array} \quad R_{\rightarrow}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \neg\varphi \\ \psi & & \neg\psi \end{array} \quad R_{\leftrightarrow}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \land \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array} \quad R_{\neg\land}$$

$$\neg\varphi \vDash \neg\varphi \lor \neg\psi$$
$$\neg\psi \vDash \neg\varphi \lor \neg\psi$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c} (\varphi \wedge \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array} \quad R_{\wedge}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \vee \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \psi \end{array} \quad R_{\vee}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \rightarrow \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\varphi & & \psi \end{array} \quad R_{\rightarrow}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \neg\varphi \\ \psi & & \neg\psi \end{array} \quad R_{\leftrightarrow}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \wedge \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array} \quad R_{\neg\wedge}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ | \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array} \quad R_{\neg\vee}$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c}(\varphi \land \psi)\\ | \\ \varphi \\ \psi\end{array}\ R_{\land} \qquad \begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \lor \psi)}\\ \diagup & \diagdown \\ \varphi & \psi\end{array}\ R_{\lor} \qquad \begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \rightarrow \psi)}\\ \diagup & \diagdown \\ \neg\varphi & \psi\end{array}\ R_{\rightarrow} \qquad \begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \leftrightarrow \psi)}\\ \diagup & \diagdown \\ \varphi & \neg\varphi \\ \psi & \neg\psi\end{array}\ R_{\leftrightarrow}$$

$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{\neg(\varphi \land \psi)}\\ \diagup & \diagdown \\ \neg\varphi & \neg\psi\end{array}\ R_{\neg\land} \qquad \begin{array}{c}\neg(\varphi \lor \psi)\\ | \\ \neg\varphi \\ \neg\psi\end{array}\ R_{\neg\lor}$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \models \neg\varphi \land \neg\psi$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c}(\varphi \land \psi)\\ | \\ \varphi \\ \psi\end{array} \quad R_{\land}$$

$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \lor \psi)}\\ / & \backslash \\ \varphi & \psi\end{array} \quad R_{\lor}$$

$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \rightarrow \psi)}\\ / & \backslash \\ \neg\varphi & \psi\end{array} \quad R_{\rightarrow}$$

$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{(\varphi \leftrightarrow \psi)}\\ / & \backslash \\ \varphi & \neg\varphi \\ \psi & \neg\psi\end{array} \quad R_{\leftrightarrow}$$

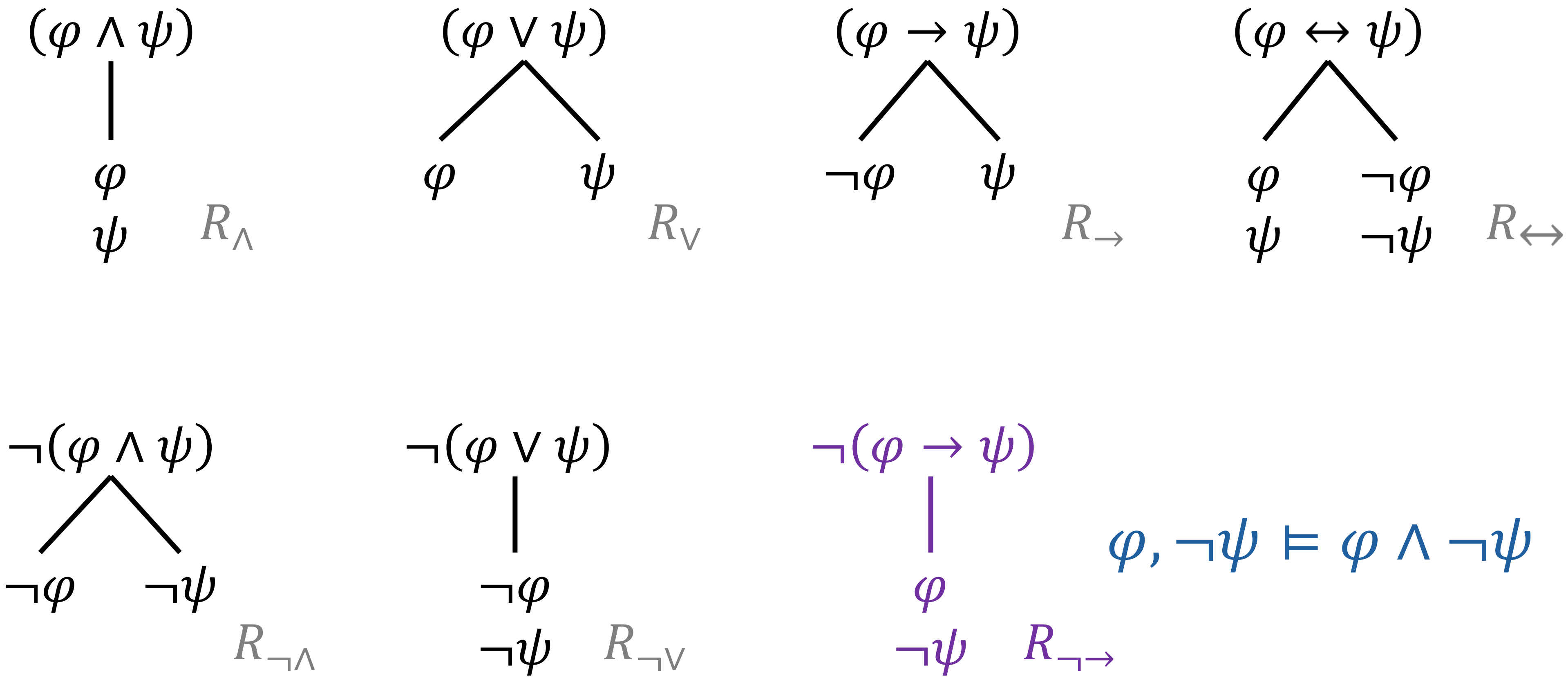
$$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{\neg(\varphi \land \psi)}\\ / & \backslash \\ \neg\varphi & \neg\psi\end{array} \quad R_{\neg\land}$$

$$\begin{array}{c}\neg(\varphi \lor \psi)\\ | \\ \neg\varphi \\ \neg\psi\end{array} \quad R_{\neg\lor}$$

$$\begin{array}{c}\neg(\varphi \rightarrow \psi)\\ | \\ \varphi \\ \neg\psi\end{array} \quad R_{\neg\rightarrow}$$

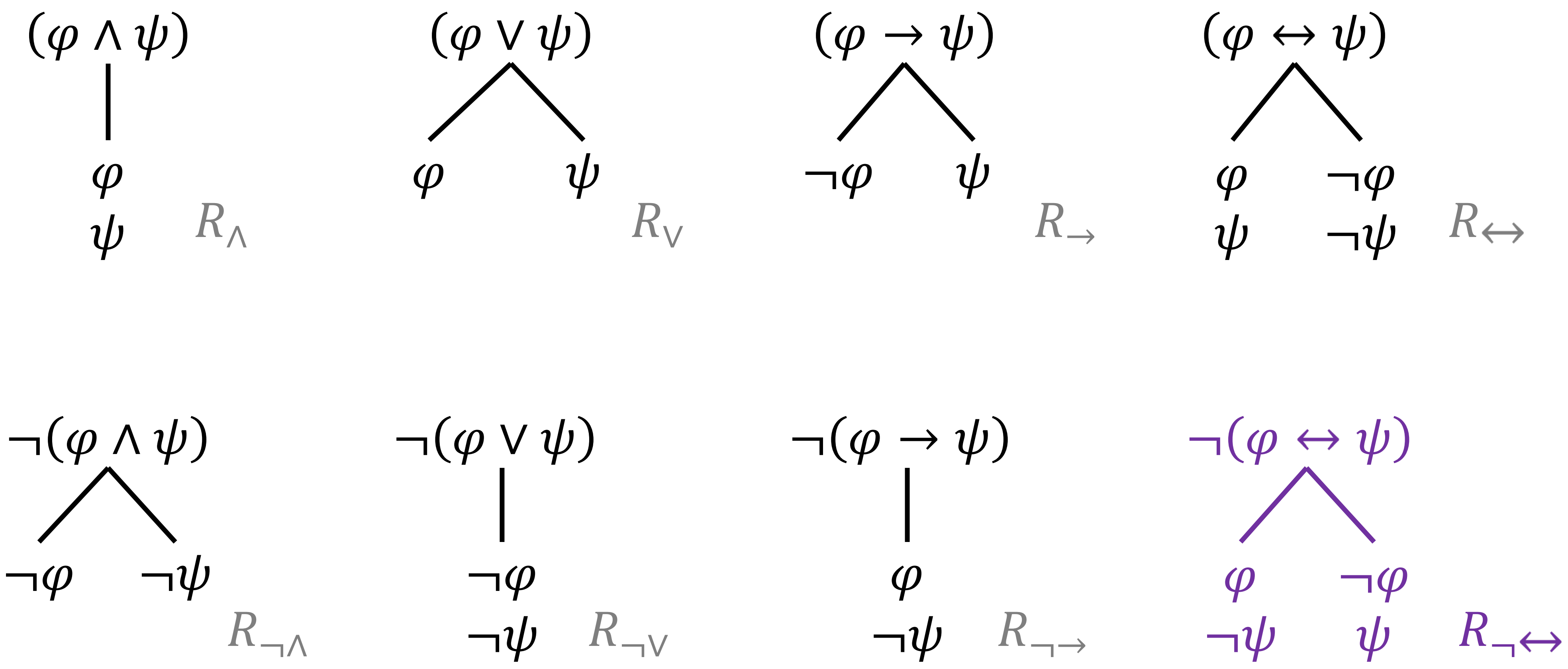
Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.



Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.



Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.

$$\begin{array}{c}(\varphi \land \psi)\\ | \\ \varphi \\ \psi\end{array} \quad R_\land
\qquad
\begin{array}{ccc} & (\varphi \lor \psi) & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \psi \end{array} \quad R_\lor
\qquad
\begin{array}{ccc} & (\varphi \to \psi) & \\ / & & \backslash \\ \neg\varphi & & \psi \end{array} \quad R_\to
\qquad
\begin{array}{ccc} & (\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \neg\varphi \\ \psi & & \neg\psi \end{array} \quad R_\leftrightarrow$$

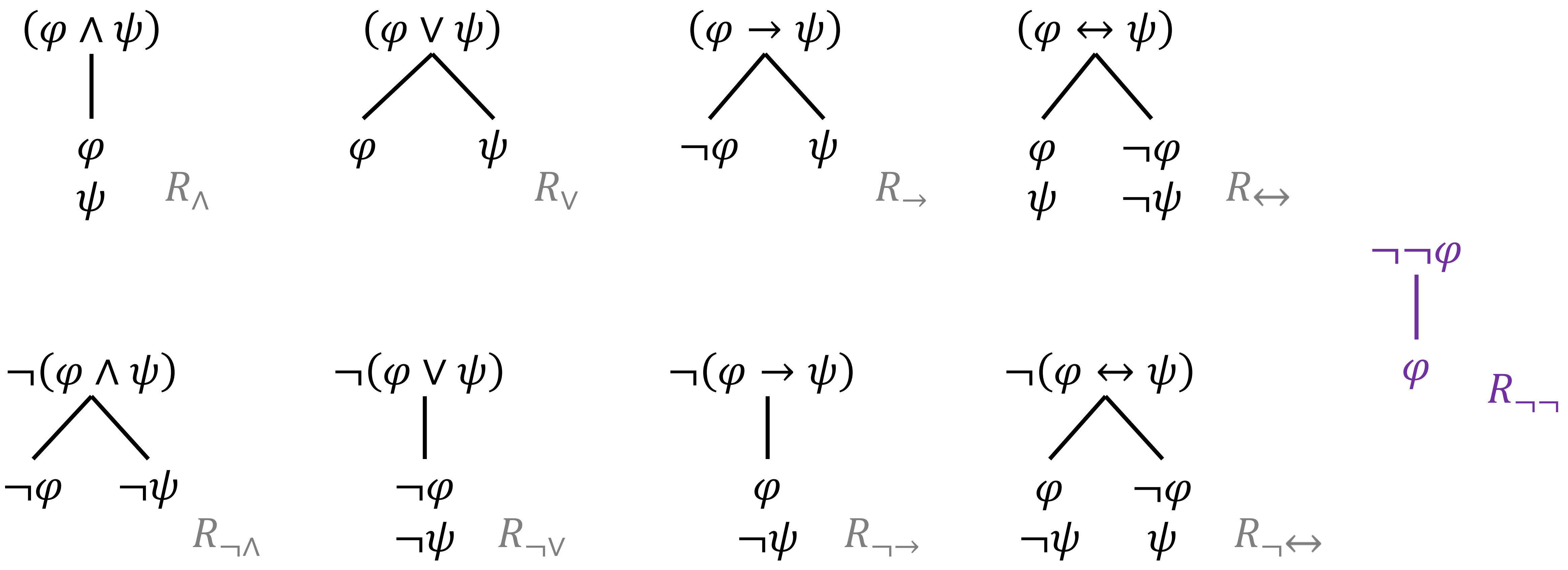
$$\varphi, \neg\psi \vDash (\varphi \land \neg\psi) \lor (\psi \land \neg\varphi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vDash (\varphi \land \neg\psi) \lor (\psi \land \neg\varphi)$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \land \psi) & \\ / & & \backslash \\ \neg\varphi & & \neg\psi \end{array} \quad R_{\neg\land}
\qquad
\begin{array}{c}\neg(\varphi \lor \psi)\\ | \\ \neg\varphi \\ \neg\psi\end{array} \quad R_{\neg\lor}
\qquad
\begin{array}{c}\neg(\varphi \to \psi)\\ | \\ \varphi \\ \neg\psi\end{array} \quad R_{\neg\to}
\qquad
\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & & \backslash \\ \varphi & & \neg\varphi \\ \neg\psi & & \psi \end{array} \quad R_{\neg\leftrightarrow}$$

Méthode des Tableaux

- La méthode des tableaux repose sur un ensemble de **9 règles**.



Méthode des Tableaux

- **Définition:** Un arbre de déduction est un arbre de formules ou chaque formule apparaissant dans un nœud est soit:
  - Une des formules composant la racine de l'arbre
  - Une formule obtenue par application d'une règle sur une formule contenue dans un nœud ancêtre

Méthode des Tableaux

- **Définition:** Un **arbre de déduction** est un arbre de formules ou chaque formule apparaissant dans un nœud est soit:
  - Une des formules composant la racine de l'arbre
  - Une formule obtenue par application d'une règle sur une formule contenue dans un nœud ancêtre

- **Déduction:** Soit $\Gamma = (H_1, \dots, H_i, \dots H_n)$ une liste de formules et G une formule. Si $\boldsymbol{\Gamma \vdash G}$ alors il existe un **arbre de déduction fermé** dont la racine est $\{H_1, \dots, H_i, \dots H_n, \neg G\}$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$
  - Construire un arbre de déduction
  - Racine: $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \wedge \neg s$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$

$$\big((p \to r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \wedge \neg s$$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$

$$(p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p \land \neg s$$

Retrait des parenthèses inutiles

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$

$$(p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p \land \neg s$$
$$|$$
$$(p \to r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$

Application de $R_\land$

$$(\varphi \land \psi)$$
$$|$$
$$\varphi$$
$$\psi$$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg s$$

$$|$$

$$(p \rightarrow r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$
$$(r \leftrightarrow q)$$

Application de $R_\wedge$

$$(\varphi \wedge \psi)$$

$$|$$

$$\varphi$$
$$\psi$$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$

$$(p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p \land \neg s$$
$$|$$
$$(p \to r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$
$$(r \leftrightarrow q)$$
$$p$$

Application de $R_\land$

$$(\varphi \land \psi)$$
$$|$$
$$\varphi$$
$$\psi$$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$

$$(p \to r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg s$$

$$(p \to r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$
$$(r \leftrightarrow q)$$
$$p$$
$$\neg s$$

Application de $R_\wedge$

$$(\varphi \wedge \psi)$$

$$\varphi$$
$$\psi$$

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$

$(p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg s$

$(\boldsymbol{p \rightarrow r})$

$(q \leftrightarrow s)$

$(r \leftrightarrow q)$

p

$\neg s$

$\neg p$ $\quad$ r

Application de $R_{\rightarrow}$

$(\boldsymbol{\varphi \rightarrow \psi})$

$\neg\varphi$ $\quad$ ψ

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p) \vdash s$

$$(p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p \land \neg s$$

$$(p \to r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$
$$(r \leftrightarrow q)$$
$$\boldsymbol{p}$$
$$\neg s$$

$\boldsymbol{\neg p}$ | r

φ et $\neg\varphi$ dans la même branche

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg s$$

$$(p \rightarrow r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$
$$(r \leftrightarrow q)$$
$$p$$
$$\neg s$$

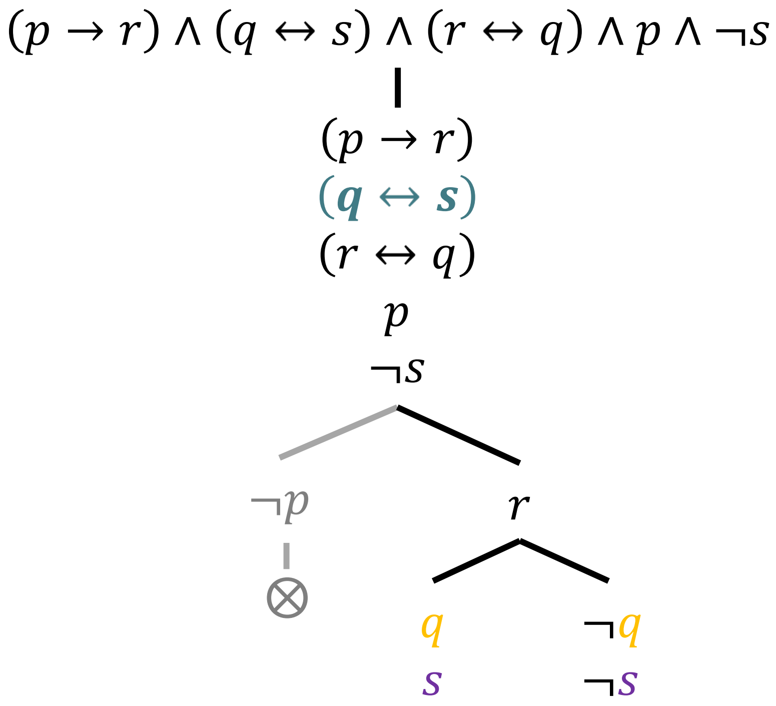
$$\neg p \qquad\qquad r$$

$$\otimes$$

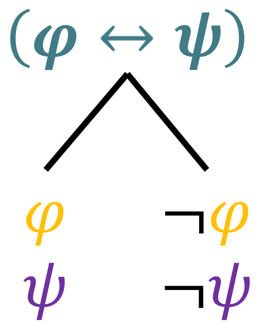
Branche fermée

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$

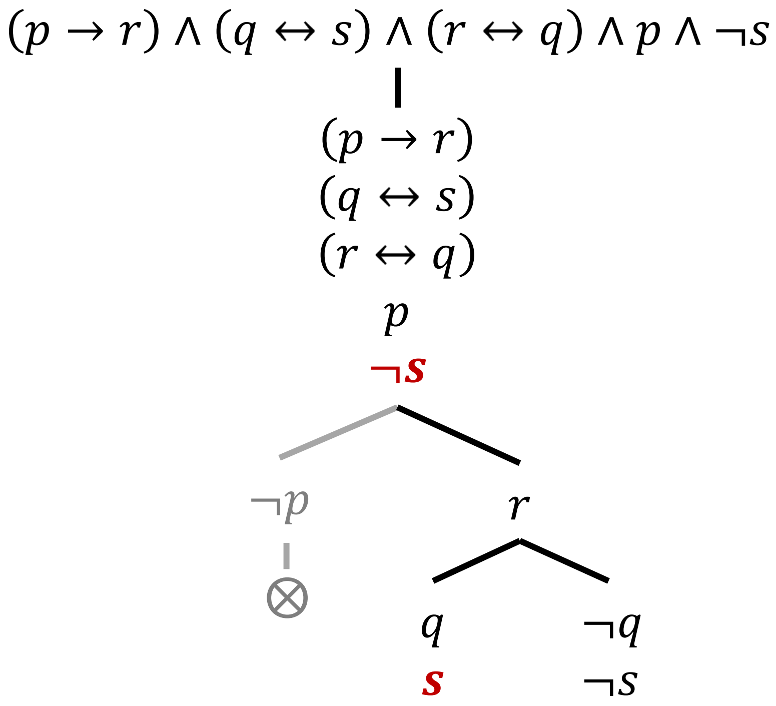


Application de $R_{\leftrightarrow}$



Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$



φ et $\neg\varphi$ dans la même branche

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$

$$(p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p \land \neg s$$

$$(p \to r)$$
$$(q \leftrightarrow s)$$
$$(r \leftrightarrow q)$$
$$p$$
$$\neg s$$

$\neg p$ — $\otimes$

r

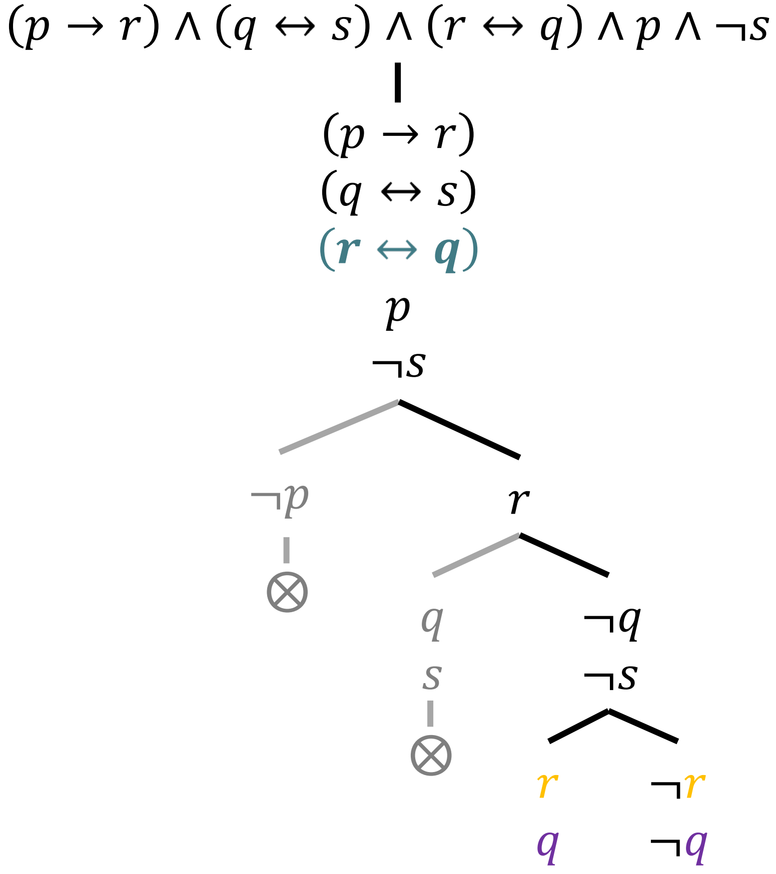
q, s — $\otimes$

$\neg q$, $\neg s$

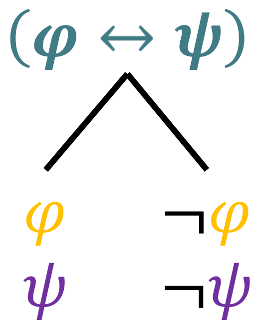
Branche fermée

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$

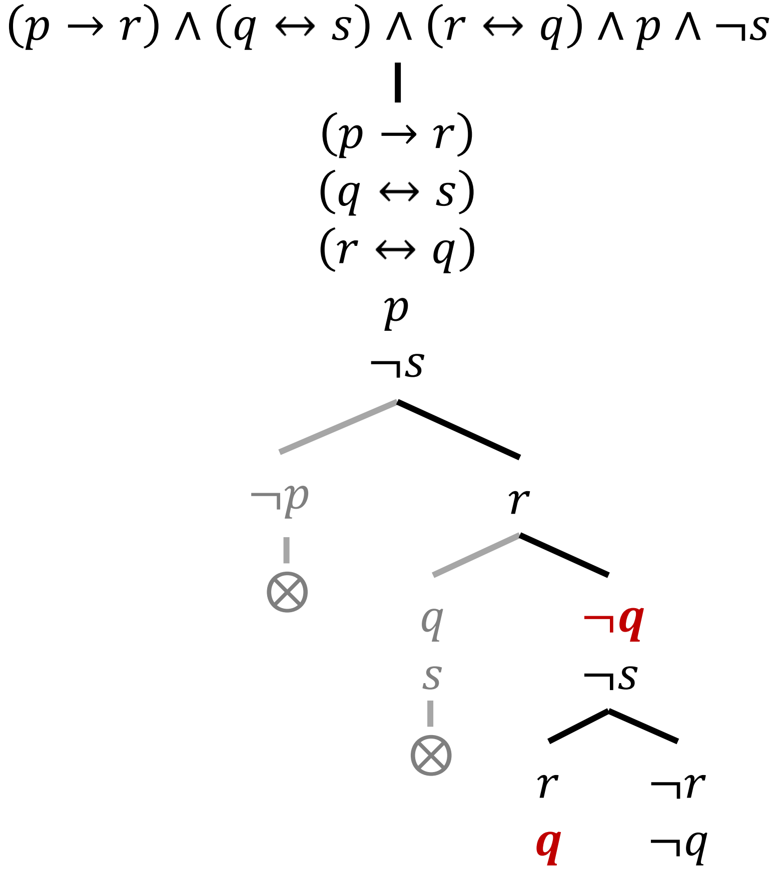


Application de $R_{\leftrightarrow}$



Méthode des Tableaux

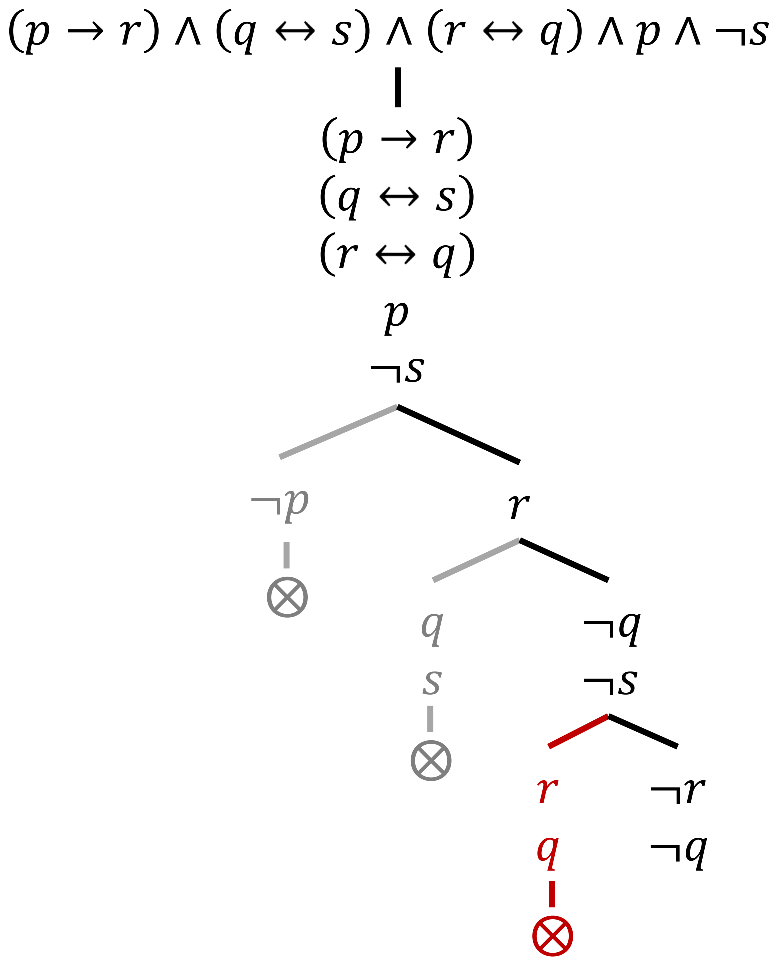
- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$



φ et $\neg\varphi$ dans la même branche

Méthode des Tableaux

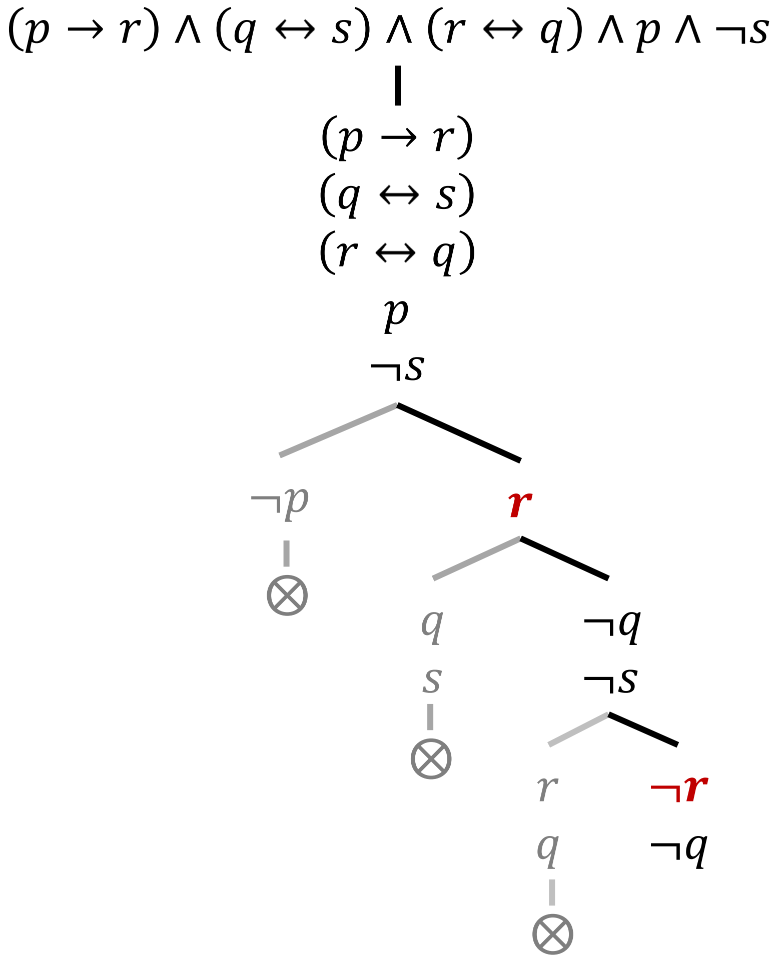
- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$



Branche fermée

Méthode des Tableaux

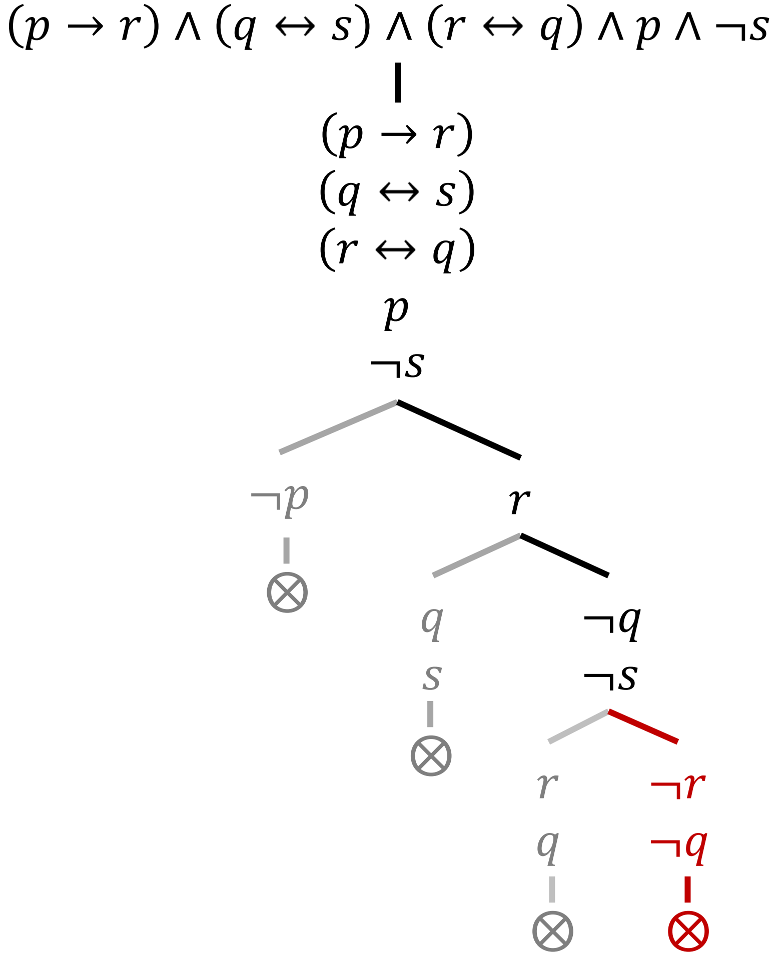
- **Exemple:** Montrer que $\big((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$



φ et $\neg\varphi$ dans la même branche

Méthode des Tableaux

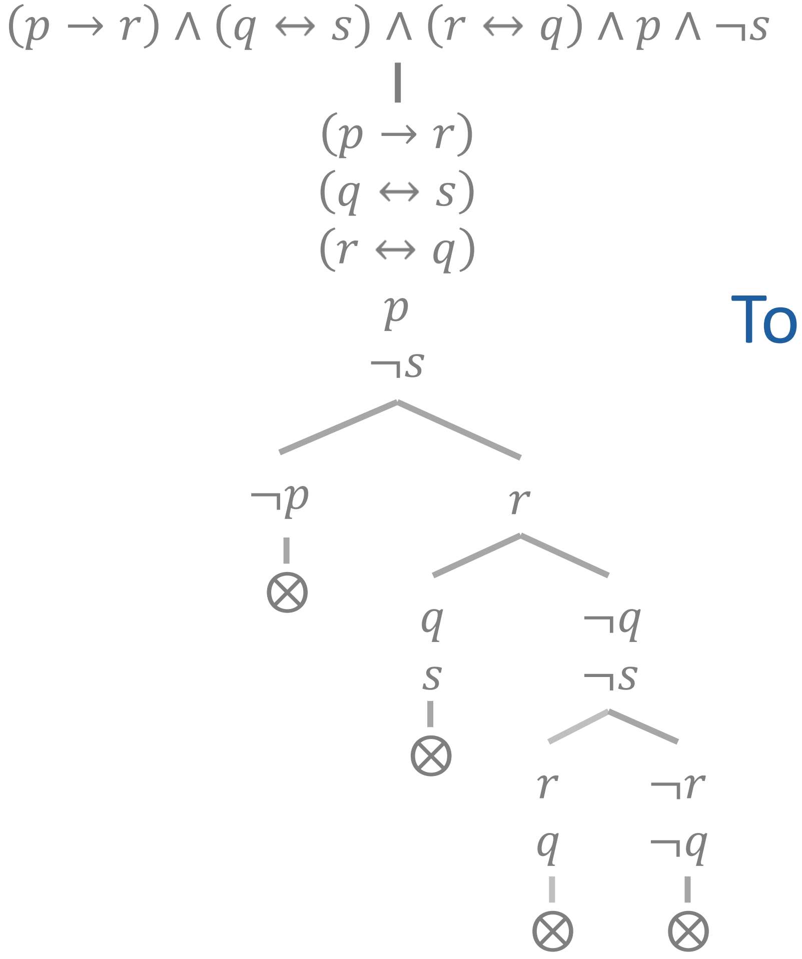
- **Exemple:** Montrer que $((p \to r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p) \vdash s$



Branche fermée

Méthode des Tableaux

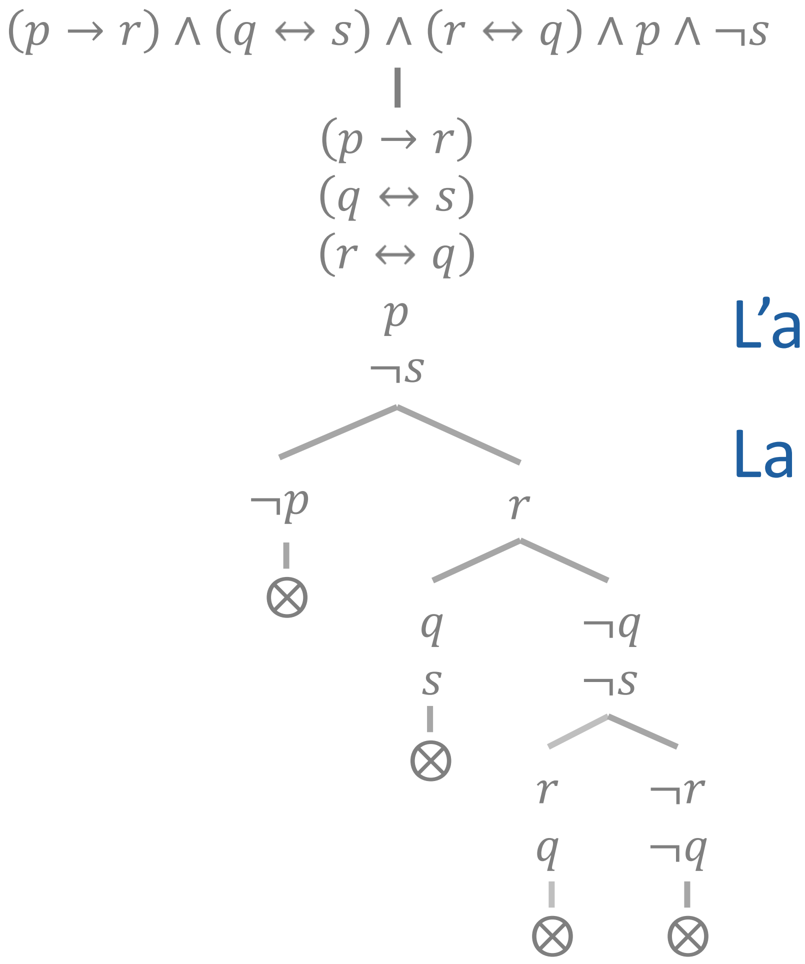
- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (r \leftrightarrow q) \wedge p\big) \vdash s$



Toutes les branches sont fermées

Méthode des Tableaux

- **Exemple:** Montrer que $\big((p \rightarrow r) \land (q \leftrightarrow s) \land (r \leftrightarrow q) \land p\big) \vdash s$



L'arbre de déduction est fermé

La démonstration est valide

Méthode des Tableaux

- **Algorithme:**

A vous de jouer !