Intelligence Artificielle

Logique du Premier Ordre

Julien SEINTURIER
Maître de Conférences

Syllogisme

- Première approche d’une formalisation du raisonnement

Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme
donc Socrate est mortel

Syllogisme

- Première approche d’une formalisation du raisonnement

Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme
donc Socrate est mortel

Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme
on peut en déduire que Socrate est mortel

Syllogisme

- En logique propositionnelle

Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme on peut en déduire que Socrate est mortel

- Ensemble de variables

h: « est un homme »
m: « est mortel »
s: « est Socrate »

Syllogisme

- En logique propositionnelle

Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme on peut en déduire que Socrate est mortel

- Ensemble de variables

h: « est un homme »
m: « est mortel »
s: « est Socrate »

- Représentation en logique propositionnelle

$$(h \rightarrow m) \wedge (s \rightarrow h) \vdash s \rightarrow m$$

Syllogisme

- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux

$$(h \to m) \land (s \to h) \land \neg(s \to m)$$

Démontrer

$$(h \to m) \land (s \to h) \vdash s \to m$$

c'est construire un arbre de déduction fermé pour

$$(h \to m) \land (s \to h) \land \neg(s \to m)$$

Syllogisme

- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux

$$(h \rightarrow m) \land (s \rightarrow h) \land \neg(s \rightarrow m)$$

$$\begin{array}{c} | \\ (h \rightarrow m) \\ (s \rightarrow h) \\ \neg(s \rightarrow m) \end{array}$$

Application de $R_\land$

$$(\varphi \land \psi \land \chi)$$

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi \\ \psi \\ \chi \end{array}$$

Syllogisme

- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux

$$(h \rightarrow m) \land (s \rightarrow h) \land \neg(s \rightarrow m)$$

$$(h \rightarrow m)$$
$$(s \rightarrow h)$$
$$\neg(s \rightarrow m)$$

$$\neg h \qquad\qquad m$$

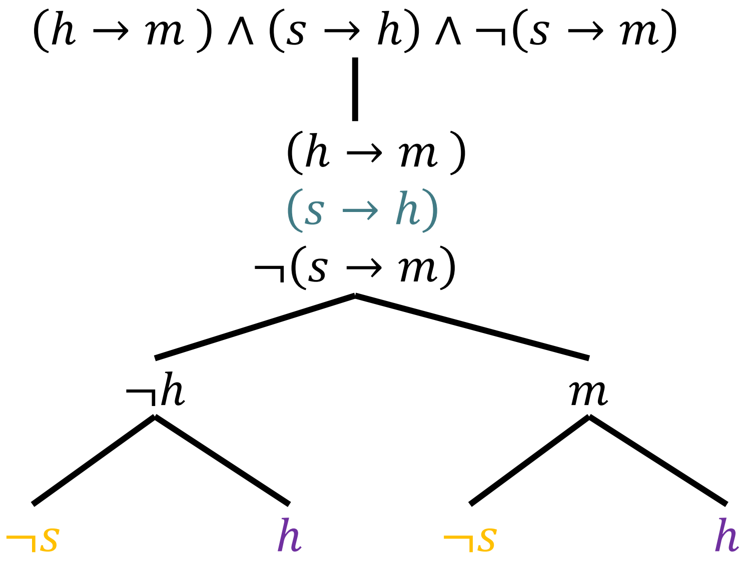
Application de $R_{\rightarrow}$

$$(\varphi \rightarrow \psi)$$

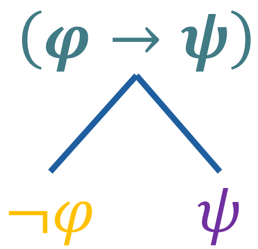
$$\neg\varphi \qquad \psi$$

Syllogisme

- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux

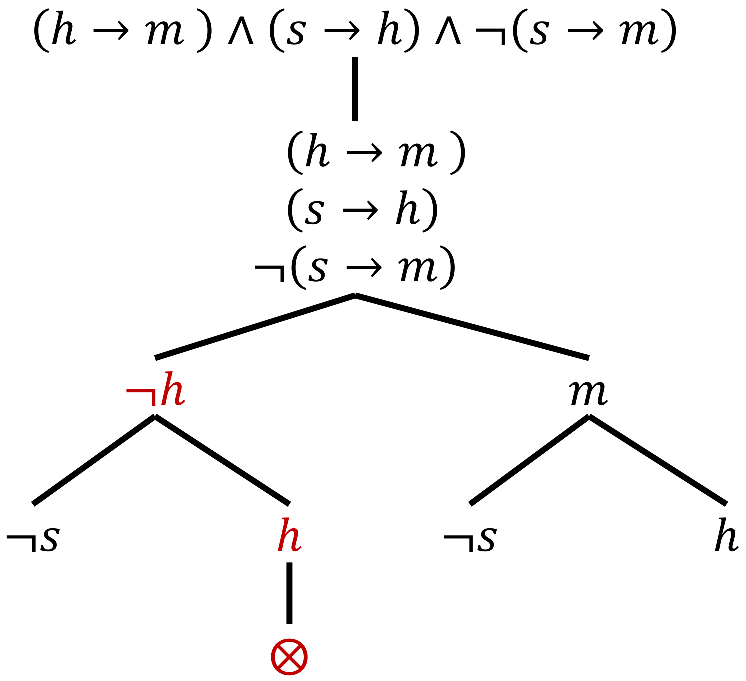


Application de $R_{\to}$



Syllogisme

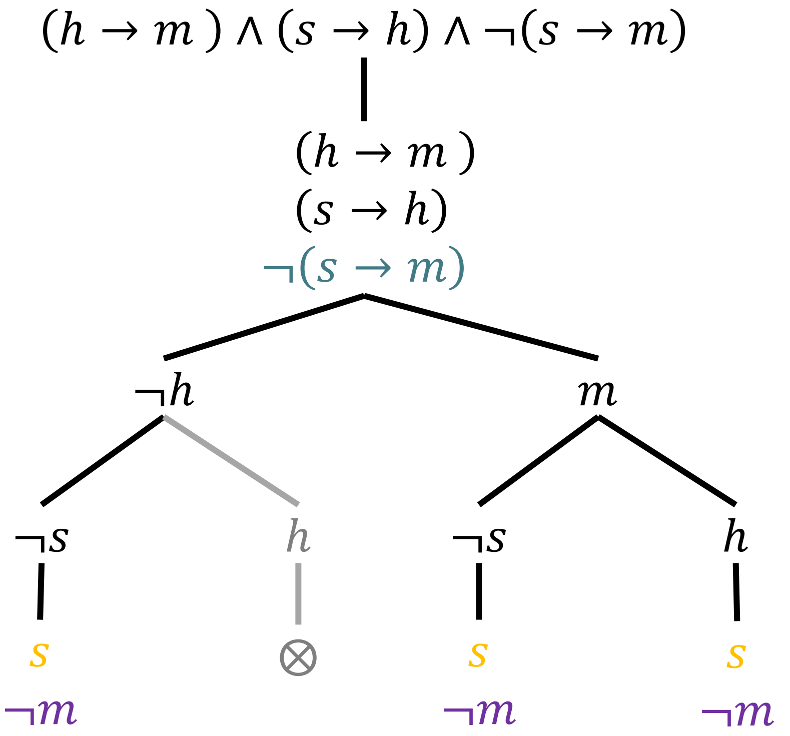
- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux



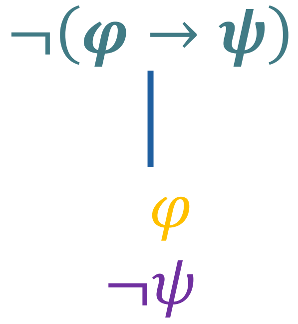
Branche fermée

Syllogisme

- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux

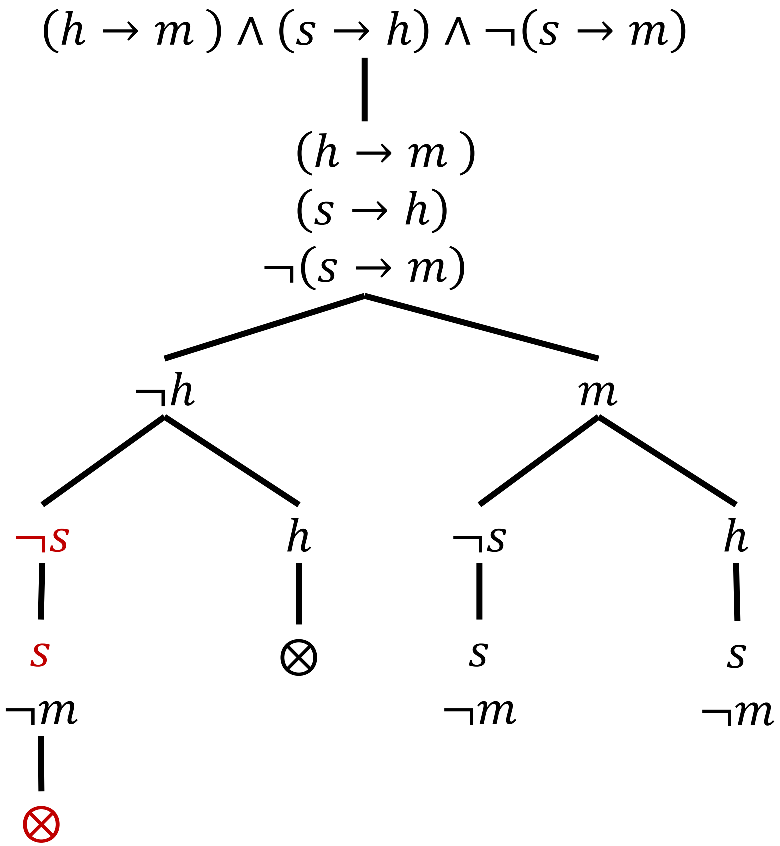


Application de $R_{\neg\rightarrow}$



Syllogisme

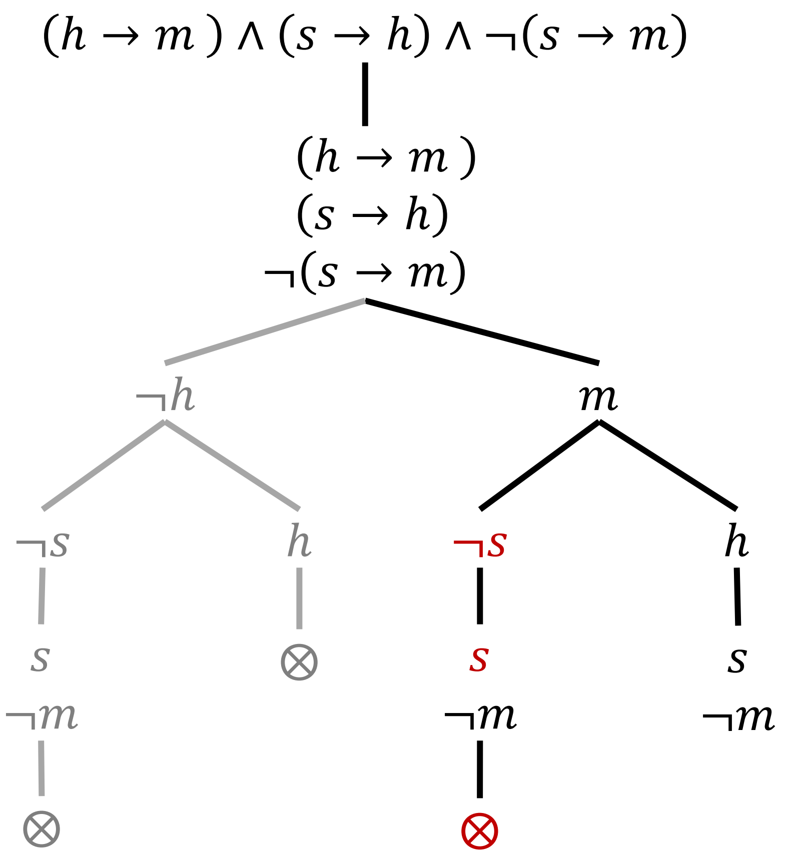
- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux



Branche fermée

Syllogisme

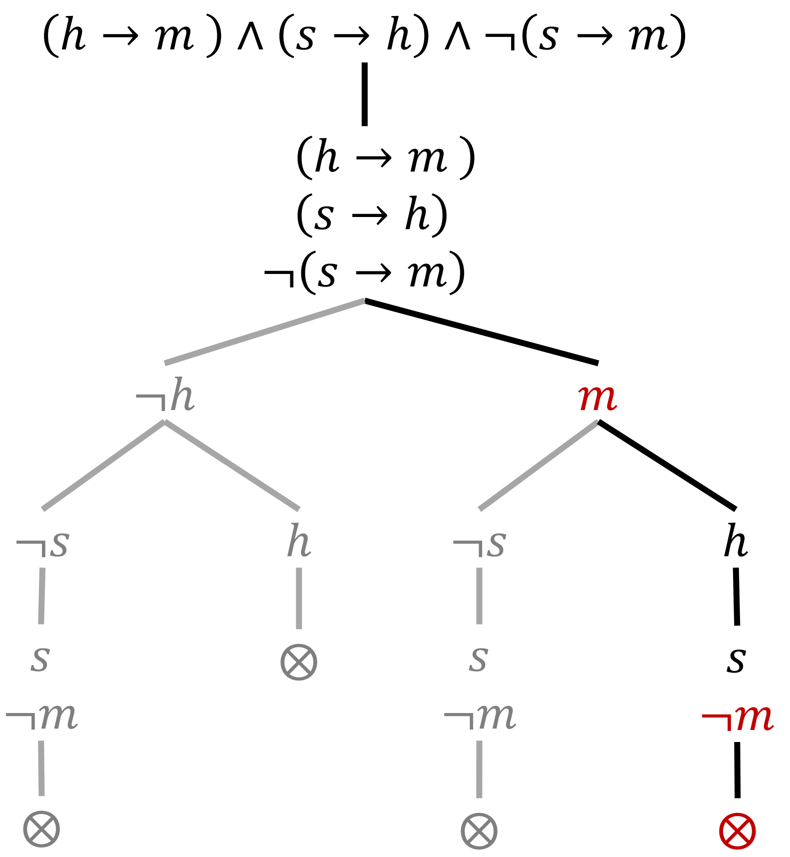
- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux



Branche fermée

Syllogisme

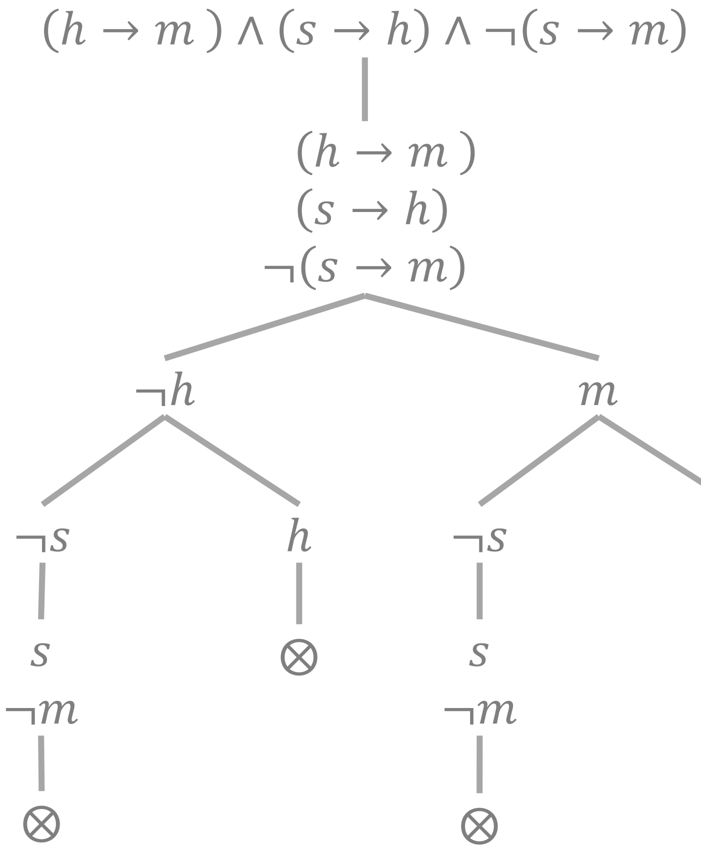
- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux



Branche fermée

Syllogisme

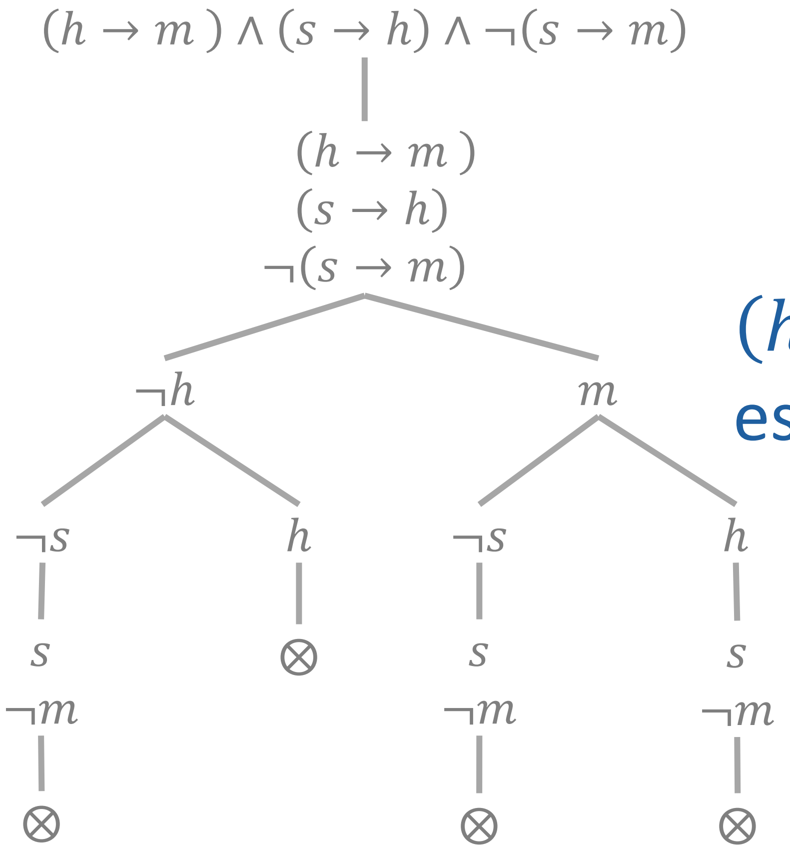
- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux



Arbre fermé

Syllogisme

- En logique propositionnelle
  - Preuve par les tableaux



Arbre fermé

$(h \rightarrow m) \wedge (s \rightarrow h) \vdash s \rightarrow m$

est démontré

Syllogisme

- Généraliser le syllogisme

  Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme on peut en déduire que Socrate est mortel

Syllogisme

- Généraliser le syllogisme

Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme on peut en déduire que Socrate est mortel

- Ensemble de variables h: « est un homme » m: « est mortel » s: « est Socrate »

- Représentation en logique propositionnelle

$$(h \rightarrow m) \land (s \rightarrow h) \vdash s \rightarrow m$$

Syllogisme

- Généraliser le syllogisme

Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme on peut en déduire que Socrate est mortel

Sachant que Tous les hommes sont mortels et que Platon est un homme on peut en déduire que Platon est mortel

- Ensemble de variables

  h: « est un homme » m: « est mortel »

  s: « est Socrate » p: « est Platon »

- Représentation en logique propositionnelle

$$(h \rightarrow m) \wedge (s \rightarrow h) \vdash s \rightarrow m$$

$$(h \rightarrow m) \wedge (p \rightarrow h) \vdash p \rightarrow m$$

Syllogisme

- Généraliser le syllogisme
  - Ensemble de variables h: « est un homme » m: « est mortel » s: « est Socrate » p: « est Platon »
  - Représentation en logique propositionnelle

$$(h \to m) \land (s \to h) \vdash s \to m$$

$$(h \to m) \land (p \to h) \vdash p \to m$$

Deux instances du même syllogisme sont représentées par deux preuves **différentes** et **indépendantes**

Syllogisme

- Généraliser le syllogisme
  - Ensemble de variables
    h: « est un homme » m: « est mortel »
    s: « est Socrate » p: « est Platon »
  - Représentation en logique propositionnelle

$$(h \to m) \land (s \to h) \vdash s \to m$$

$$(h \to m) \land (p \to h) \vdash p \to m$$

Deux instances du même syllogisme sont représentées par deux preuves **différentes** et **indépendantes**

Chaque nouvelle instance **augmente** le nombre de **variables**, de **formules** et de **preuves**

Domaine

- Propositions

Domaine

- Propositions
  - *a: « il pleut »*
  - *b: « il fait froid»*

Domaine

- Propositions
  - *a: « il pleut »*
  - *b: « il fait froid»*
- Interprétations

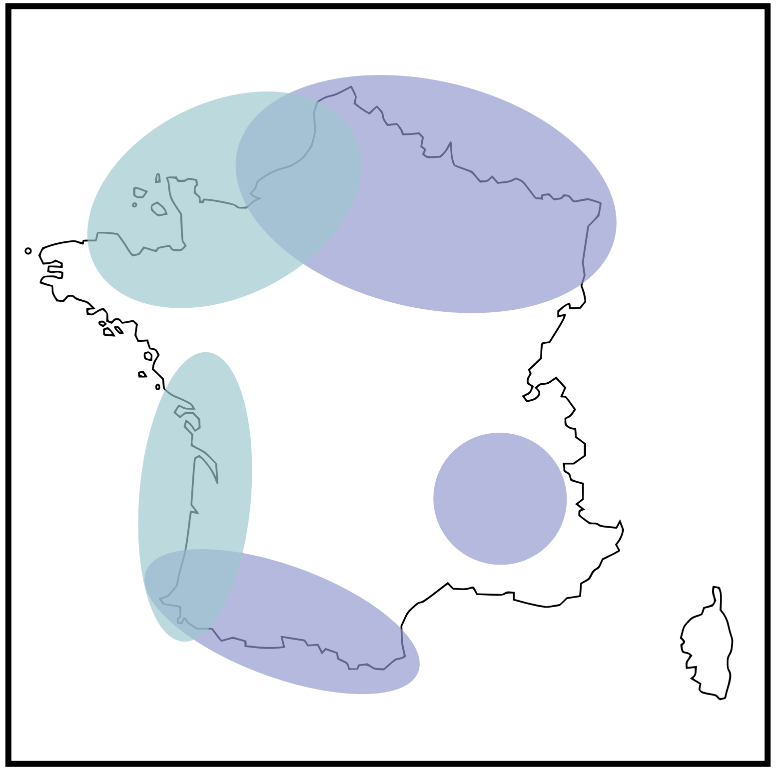
Ω	a	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ \ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ \ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ \ a,\ \ b\}$	*vrai*	*vrai*

Domaine

- Propositions
  - *a: « il pleut »*
  - *b: « il fait froid»*
- Interprétations

Ω	a	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*

Mais où ?



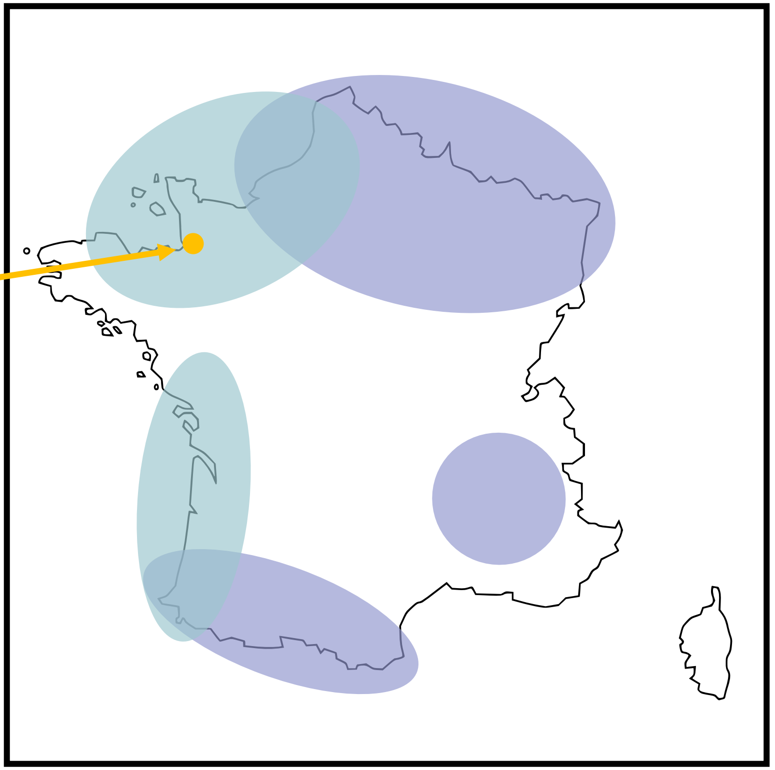
Domaine

- Propositions
  - *a: « il pleut »*
  - *b: « il fait froid»*
- Interprétations

Ω	a	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*

Mais où ?

Avranches



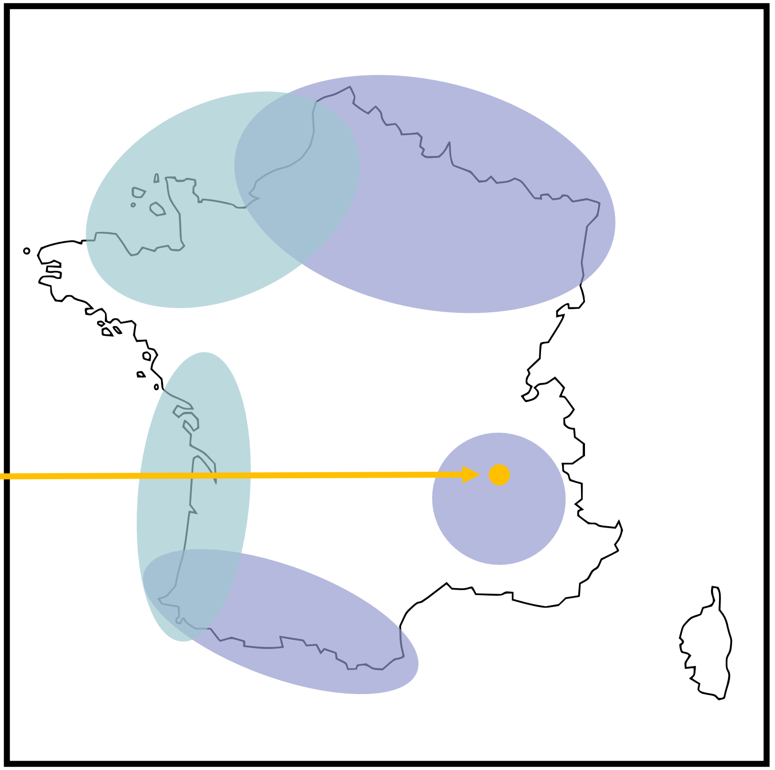
Domaine

- Propositions
  - a: « *il pleut* »
  - b: « *il fait froid*»
- Interprétations

Ω	a	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ \ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ \ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ \ a,\ \ b\}$	*vrai*	*vrai*

Mais où ?

Grenoble



Domaine

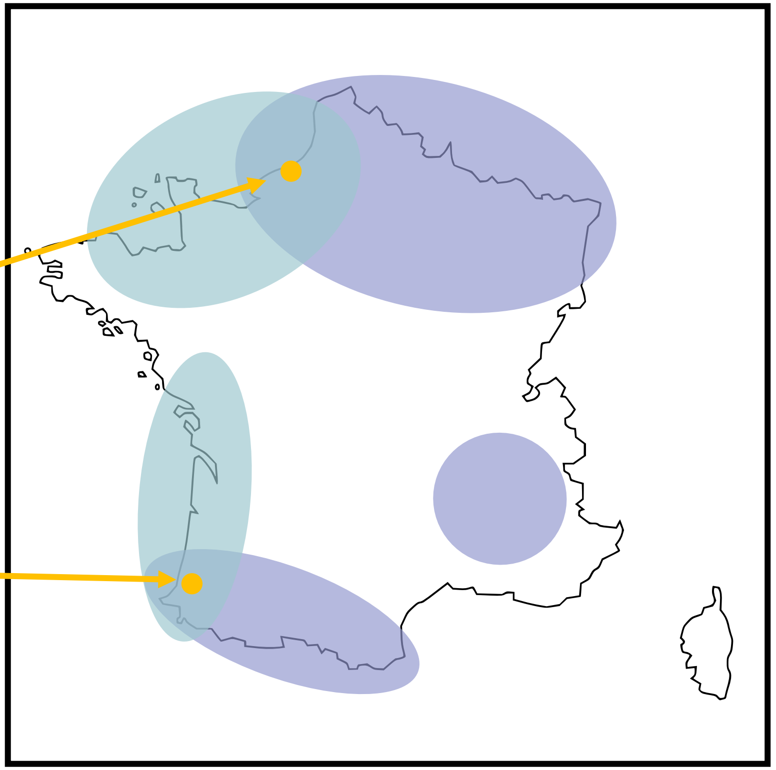
- Propositions
  - *a: « il pleut »*
  - *b: « il fait froid»*
- Interprétations

Ω	a	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ a,\ b\}$	*vrai*	*vrai*

Mais où ?

Dieppe

Dax



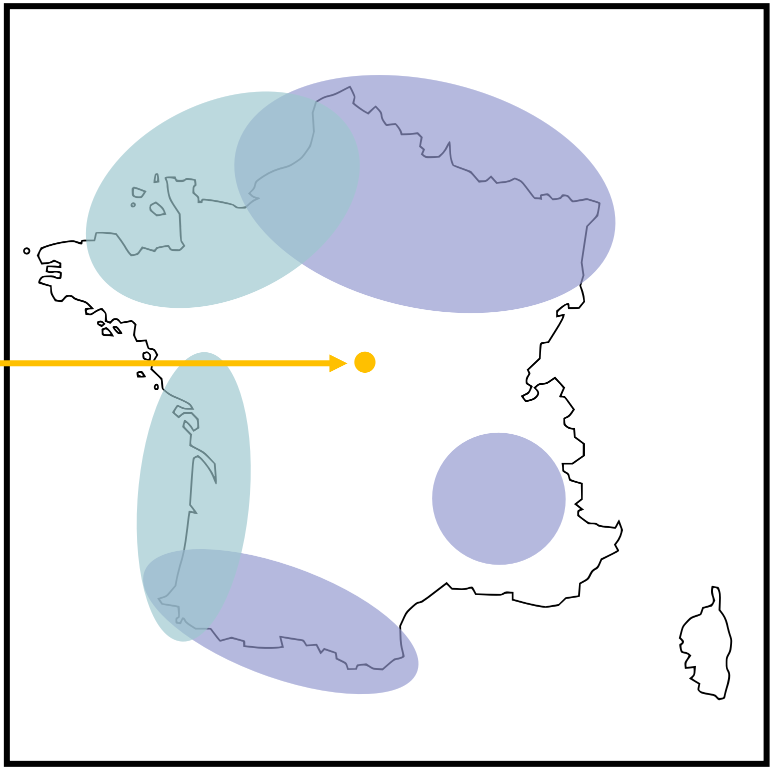
Domaine

- Propositions
  - *a: « il pleut »*
  - *b: « il fait froid»*
- Interprétations

Ω	a	b
$\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$	*faux*	*faux*
$\omega_1 = \{\ \ a, \neg b\}$	*vrai*	*faux*
$\omega_2 = \{\neg a,\ \ b\}$	*faux*	*vrai*
$\omega_3 = \{\ \ a,\ \ b\}$	*vrai*	*vrai*

Mais où ?

Bourges



Domaine d'interprétation

- **Définition:** Un domaine d'interprétation, noté $\Omega_{\mathcal{J}}$, est un ensemble composé d'éléments pour lesquels des assertions peuvent être énoncées et vérifiées

Domaine d'interprétation

- **Définition:** Un **domaine d'interprétation**, noté $\Omega_{\mathcal{I}}$, est un ensemble composé d'éléments pour lesquels des **assertions** peuvent être **énoncées** et **vérifiées**
  - Peut être **fini** ou **infini**

Domaine d'interprétation

- **Définition:** Un **domaine d'interprétation**, noté $\Omega_{\mathcal{J}}$, est un ensemble composé d'éléments pour lesquels des **assertions** peuvent être **énoncées** et **vérifiées**
  - Peut être **fini** ou **infini**
  - Peut être **dénombrable** ou **indénombrable**

Domaine d'interprétation

- **Définition:** Un **domaine d'interprétation**, noté $\boldsymbol{\Omega_{\mathcal{J}}}$, est un ensemble composé d'éléments pour lesquels des **assertions** peuvent être **énoncées** et **vérifiées**
  - Peut être **fini** ou **infini**
  - Peut être **dénombrable** ou **indénombrable**
- **Exemple:** Domaine d'interprétation de l'exemple précédent:

$$\{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

Domaine d'interprétation

- **Définition:** Un **domaine d'interprétation**, noté $\Omega_{\mathcal{I}}$, est un ensemble composé d'éléments pour lesquels des **assertions** peuvent être **énoncées** et **vérifiées**
  - Peut être **fini** ou **infini**
  - Peut être **dénombrable** ou **indénombrable**
- **Exemple:** Domaine d'interprétation de l'exemple précédent:
$$\{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$
  - Pour chaque élément on peut vérifier les assertions

    a: « il pleut » *b: « il fait froid»*

Domaine d'interprétation

- **Définition:** Un **domaine d'interprétation**, noté $\Omega_{\mathcal{J}}$, est un ensemble composé d'éléments pour lesquels des **assertions** peuvent être **énoncées** et **vérifiées**
  - Peut être **fini** ou **infini**
  - Peut être **dénombrable** ou **indénombrable**
- **Exemple:** Domaine d'interprétation de l'exemple précédent:

$$\{Avranches, Bourges, Dax, Dieppe, Grenoble\}$$

  - Pour chaque élément on peut vérifier les assertions

    a: « il pleut »   *b: « il fait froid»*
  - Ce domaine est fini et dénombrable

Prédicat

- **Définition:** Soit un domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$. Un **prédicat** exprime la valeur d'une assertion sur un ou plusieurs éléments du domaine.

Prédicat

- **Définition:** Soit un domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$. Un **prédicat** exprime la valeur d'une assertion sur un ou plusieurs éléments du domaine. Plus formellement, un prédicat $\boldsymbol{P}$ est une application telle que:

$$\boldsymbol{P}: \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Omega_{\mathcal{I}}^{n}} & \longrightarrow & \{\boldsymbol{vrai}, \boldsymbol{faux}\} \\ (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) & \longmapsto & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \end{array}$$

Prédicat

- **Définition:** Soit un domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$. Un **prédicat** exprime la valeur d'une assertion sur un ou plusieurs éléments du domaine. Plus formellement, un prédicat $\boldsymbol{P}$ est une application telle que:

$$\boldsymbol{P}: \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Omega_{\mathcal{J}}^{n}} & \longrightarrow & \{\boldsymbol{vrai}, \boldsymbol{faux}\} \\ (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) & \longmapsto & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \end{array}$$

où les éléments $(x_1, \dots, x_n)$ sont appelés **arguments**

Prédicat

- **Définition:** Soit un domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$. Un **prédicat** exprime la valeur d'une assertion sur un ou plusieurs éléments du domaine. Plus formellement, un prédicat $\boldsymbol{P}$ est une application telle que:

$$\boldsymbol{P}\colon \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Omega_{\mathcal{J}}^{n}} & \longrightarrow & \{\boldsymbol{vrai}, \boldsymbol{faux}\} \\ (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) & \longmapsto & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \end{array}$$

  où les éléments $(x_1, \dots, x_n)$ sont appelés **arguments**

- Un prédicat concernant un seul élément exprime l'existence d'une **propriété** de cet élément

Prédicat

- **Définition:** Soit un domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$. Un **prédicat** exprime la valeur d'une assertion sur un ou plusieurs éléments du domaine. Plus formellement, un prédicat $\boldsymbol{P}$ est une application telle que:

$$\boldsymbol{P}: \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Omega_{\mathcal{J}}^{n}} & \longrightarrow & \{\boldsymbol{vrai}, \boldsymbol{faux}\} \\ (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) & \longmapsto & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}) \end{array}$$

  où les éléments $(x_1, \dots, x_n)$ sont appelés **arguments**

- Un prédicat concernant un seul élément exprime l'existence d'une **propriété** de cet élément

- Un prédicat concernant plusieurs éléments exprime l'existence d'une **relation** entre ces éléments

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Soit le prédicat $pair(x)$ représentant l'assertion « $x\ est\ pair$ »

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Soit le prédicat $pair(x)$ représentant l'assertion « $x\ est\ pair$ »
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = vrai$ possède la **propriété** d'être pair

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Soit le prédicat $pair(x)$ représentant l'assertion « $x\ est\ pair$ »
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = vrai$ possède la **propriété** d'être pair
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = faux$ ne possède pas la **propriété** d'être *pair*

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Soit le prédicat $pair(x)$ représentant l'assertion « $x\ est\ pair$ »
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = vrai$ possède la **propriété** d'être pair
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = faux$ ne possède pas la **propriété** d'être *pair*
- Soit le prédicat $sup(x, y)$ représentant l'assertion « $x\ est\ supérieur\ à\ y$ »

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathfrak{I}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Soit le prédicat $pair(x)$ représentant l'assertion « $x\ est\ pair$ »
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = vrai$ possède la **propriété** d'être pair
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = faux$ ne possède pas la **propriété** d'être *pair*
- Soit le prédicat $sup(x, y)$ représentant l'assertion « $x\ est\ supérieur\ à\ y$ »
  - Pour tout $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $sup(x, y) = vrai$ la **relation** *supérieur à* existe

Exemple

- Soit le domaine $\Omega_{\mathcal{J}}$ assimilé aux entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Soit le prédicat $pair(x)$ représentant l'assertion « $x\ est\ pair$ »
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = vrai$ possède la **propriété** d'être pair
  - Tout $x \in \mathbb{N}$ tel que $pair(x) = faux$ ne possède pas la **propriété** d'être *pair*
- Soit le prédicat $sup(x, y)$ représentant l'assertion « $x\ est\ supérieur\ à\ y$ »
  - Pour tout $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $sup(x, y) = vrai$ la **relation** *supérieur à* existe
  - Pour tout $x, y \in \mathbb{N}$ tel que $sup(x, y) = faux$ la **relation** *supérieur à* n'existe pas

Prédicat

- **Définition:** On appelle arité le nombre d'arguments d'un prédicat

Prédicat

- **Définition:** On appelle **arité** le nombre d'arguments d'un prédicat

- **Notation:** Soit P un prédicat
  - $P(x)$ est un prédicat d'arité 1, ou prédicat **unaire**

Prédicat

- **Définition:** On appelle arité le nombre d'arguments d'un prédicat

- **Notation:** Soit P un prédicat
  - $P(x)$ est un prédicat d'arité 1, ou prédicat **unaire**
  - $P(x, y)$ est un prédicat d'arité 2, ou prédicat **binaire**

Prédicat

- **Définition:** On appelle **arité** le nombre d'arguments d'un prédicat

- **Notation:** Soit P un prédicat
  - $P(x)$ est un prédicat d'arité 1, ou prédicat **unaire**
  - $P(x, y)$ est un prédicat d'arité 2, ou prédicat **binaire**
  - $P(x_1, \ldots, x_n)$ est un prédicat d'arité n, ou prédicat **n-aire**

Prédicat

- **Définition:** On appelle arité le nombre d'arguments d'un prédicat

- **Notation:** Soit P un prédicat
  - $P(x)$ est un prédicat d'arité 1, ou prédicat **unaire**
  - $P(x, y)$ est un prédicat d'arité 2, ou prédicat **binaire**
  - $P(x_1, \ldots, x_n)$ est un prédicat d'arité n, ou prédicat **n-aire**

- Un prédicat n'ayant **aucun argument** est un prédicat d'arité 0. Il s'agit d'une **constante** (sa valeur étant soit $vrai$ soit $faux$)

Variable et constantes

- **Définition:** Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Les arguments d'un prédicat sont soit:

Variable et constantes

- **Définition:** Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation. Les arguments d'un prédicat sont soit:
  - Des **variables** prenant leurs valeurs dans $\Omega_{\mathcal{J}}$

Variable et constantes

- **Définition:** Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation. Les arguments d'un prédicat sont soit:
  - Des **variables** prenant leurs valeurs dans $\Omega_{\mathcal{J}}$
  - Des **constantes** dont les valeurs fixées sont des éléments de $\Omega_{\mathcal{J}}$

Variable et constantes

- **Définition:** Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Les arguments d'un prédicat sont soit:
  - Des **variables** prenant leurs valeurs dans $\Omega_{\mathcal{I}}$
  - Des **constantes** dont les valeurs fixées sont des éléments de $\Omega_{\mathcal{I}}$

- **Notations:**
  - L'ensemble des variables est noté $\boldsymbol{\mathcal{X}}$
  - L'ensemble des constantes est noté $\boldsymbol{\mathcal{C}}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}} = \{a, b, c\}$ un domaine d'interprétation

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$ un domaine d'interprétation
  - Soit l'ensemble des variables $\mathcal{X} = \{x, y\}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}} = \{a, b, c\}$ un domaine d'interprétation
  - Soit l'ensemble des variables $\mathcal{X} = \{x, y\}$
  - Soit l'ensemble des constantes $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ avec $c_1 = a$ et $c_2 = b$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$ un domaine d'interprétation
  - Soit l'ensemble des variables $\mathcal{X} = \{x, y\}$
  - Soit l'ensemble des constantes $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ avec $c_1 = a$ et $c_2 = b$
  - Soit P un prédicat d'arité 2 (binaire)

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$ un domaine d'interprétation
  - Soit l'ensemble des variables $\mathcal{X} = \{x, y\}$
  - Soit l'ensemble des constantes $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ avec $c_1 = a$ et $c_2 = b$
  - Soit P un prédicat d'arité 2 (binaire)

- On peut écrire:
  - $P(x, y)$
  - $P(x, c_1)$
  - $P(c_1, c_2)$

Expression logique

- Plusieurs prédicats peuvent être liés grâce à des connecteurs logiques afin de former une expression logique

Expression logique

- Plusieurs prédicats peuvent être liés grâce à des connecteurs logiques afin de former une expression logique
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* ou *« il fait froid à y»*
  - Si *« il pleut à x »* alors *« il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* équivaut à *« il fait froid à y »*
  - *« Il ne pleut pas à x »*

Expression logique

- Plusieurs prédicats peuvent être liés grâce à des connecteurs logiques afin de former une expression logique
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* ou *« il fait froid à y»*
  - Si *« il pleut à x »* alors *« il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* équivaut à *« il fait froid à y »*
  - *« Il ne pleut pas à x »*

- Ces connecteurs sont suffisants pour représenter n'importe quelle expression logique (voir Logique Propositionnelle)

Connecteurs de la Logique Propositionnelle

- ∧ : Conjonction (et)
- ∨ : Disjonction (ou inclusif)
- ¬: Négation (non)
- →: Implication (alors)
- ⟷: Equivalence (est équivalent à)

Symboles

- ( ) : Parenthèses de désambiguation

Expression logique

- Soit $pleut(x)$ le prédicat « *Il pleut à x* » et soit $froid(y)$ le prédicat « *Il fait froid à y* »

Expression logique

- Soit $pleut(x)$ le prédicat *« Il pleut à x »* et soit $froid(y)$ le prédicat *« Il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »* $\Longleftrightarrow$ $pleut(x) \wedge froid(y)$

Expression logique

- Soit $pleut(x)$ le prédicat *« Il pleut à x »* et soit $froid(y)$ le prédicat *« Il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »* ⟺ $pleut(x) \wedge froid(y)$
  - *« Il pleut à x »* ou *« il fait froid à y»* ⟺ $pleut(x) \vee froid(y)$

Expression logique

- Soit $pleut(x)$ le prédicat *« Il pleut à x »* et soit $froid(y)$ le prédicat *« Il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »* ⟺ $pleut(x) \wedge froid(y)$
  - *« Il pleut à x »* ou *« il fait froid à y»* ⟺ $pleut(x) \vee froid(y)$
  - Si *« il pleut à x »* alors *« il fait froid à y »* ⟺ $pleut(x) \rightarrow froid(y)$

Expression logique

- Soit $pleut(x)$ le prédicat *« Il pleut à x »* et soit $froid(y)$ le prédicat *« Il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »* $\Longleftrightarrow$ $pleut(x) \wedge froid(y)$
  - *« Il pleut à x »* ou *« il fait froid à y»* $\Longleftrightarrow$ $pleut(x) \vee froid(y)$
  - Si *« il pleut à x »* alors *« il fait froid à y »* $\Longleftrightarrow$ $pleut(x) \rightarrow froid(y)$
  - *« Il pleut à x »* équivaut à *« il fait froid à y »* $\Longleftrightarrow$ $pleut(x) \leftrightarrow froid(y)$

Expression logique

- Soit $pleut(x)$ le prédicat *« Il pleut à x »* et soit $froid(y)$ le prédicat *« Il fait froid à y »*
  - *« Il pleut à x »* et *« il fait froid à y »* ⟺ $pleut(x) \wedge froid(y)$
  - *« Il pleut à x »* ou *« il fait froid à y»* ⟺ $pleut(x) \vee froid(y)$
  - Si *« il pleut à x »* alors *« il fait froid à y »* ⟺ $pleut(x) \rightarrow froid(y)$
  - *« Il pleut à x »* équivaut à *« il fait froid à y »* ⟺ $pleut(x) \leftrightarrow froid(y)$
  - *« Il ne pleut pas à x »* ⟺ $\neg pleut(x)$

Quantification

- Une assertion peut être **quantifiée**

Quantification

- Une assertion peut être **quantifiée**
  - *« Il pleut de partout »*
  - *« il fait froid à certains endroits »*

Quantification

- Une assertion peut être **quantifiée**
  - *« Il pleut de partout »*
  - *« il fait froid à certains endroits »*
- Une expression logique **ne peut pas** représenter la quantification

Quantification

- Une assertion peut être **quantifiée**
  - *« Il pleut de partout »*
  - *« il fait froid à certains endroits »*
- Une expression logique **ne peut pas** représenter la quantification
  - ***Partout*** *« Il pleut »*
  - ***A certains endroits*** *« il fait froid »*

Quantification

- Une assertion peut être **quantifiée**
  - *« Il pleut de partout »*
  - *« il fait froid à certains endroits »*
- Une expression logique **ne peut pas** représenter la quantification
  - ***Partout*** *« Il pleut »*
  - ***A certains endroits*** *« il fait froid »*
- La quantification est une **contrainte** sur les variables

Quantification

- Une assertion peut être **quantifiée**
  - *« Il pleut de partout »*
  - *« il fait froid à certains endroits »*
- Une expression logique **ne peut pas** représenter la quantification
  - ***Partout*** *« Il pleut »*
  - ***A certains endroits*** *« il fait froid »*
- La quantification est une **contrainte** sur les variables
  - ***Pour tout endroit x*** *« Il pleut à x »*
  - ***Il existe des endroits y où*** *« il fait froid à y »*

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:
  - **Quantificateur universel**, noté $\forall$, qui signifie « pour tout »

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:
  - **Quantificateur universel**, noté ∀, qui signifie « pour tout »
  - **Quantificateur existentiel**, noté ∃, qui signifie « il existe »

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:
  - Quantificateur universel, noté ∀, qui signifie « pour tout »
  - Quantificateur existentiel, noté ∃, qui signifie « il existe »
- **Syntaxe:** Un quantificateur est suivi de la variable qu'il contraint et précède l'expression logique à laquelle il s'applique

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:
  - **Quantificateur universel**, noté ∀, qui signifie « pour tout »
  - **Quantificateur existentiel**, noté ∃, qui signifie « il existe »

- **Syntaxe:** Un quantificateur est suivi de la variable qu'il contraint et précède l'expression logique à laquelle il s'applique

$$\forall x \; pleut(x)$$

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:
  - Quantificateur universel, noté ∀, qui signifie « pour tout »
  - Quantificateur existentiel, noté ∃, qui signifie « il existe »

- **Syntaxe:** Un quantificateur est suivi de la variable qu’il contraint et précède l’expression logique à laquelle il s’applique

$$\forall x \; pleut(x)$$

- **Syntaxe:** Plusieurs quantificateurs peuvent précéder une expression logique

Quantification

- **Définition:** Un quantificateur est un symbole qui contraint une variable pour une expression logique. Il en existe deux:
  - Quantificateur universel, noté ∀, qui signifie « pour tout »
  - Quantificateur existentiel, noté ∃, qui signifie « il existe »
- **Syntaxe:** Un quantificateur est suivi de la variable qu'il contraint et précède l'expression logique à laquelle il s'applique

$$\forall x \; pleut(x)$$

- **Syntaxe:** Plusieurs quantificateurs peuvent précéder une expression logique

$$\forall x \; \exists y \; pleut(x) \wedge froid(y)$$

Exemple

- Assertions
  - Tous les humains sont mortels
  - Tout humain à une mère
  - Il existe des humains jumeaux

Exemple

- Assertions
  - Tous les humains sont mortels
  - Tout humain à une mère
  - Il existe des humains jumeaux
- Représentation en prédicats quantifiés
  - $\Omega_{\mathcal{J}} = \{humanité\}, \mathcal{V} = \{x, y\}, \mathcal{P} = \{mortel, mere, jumeaux\}$

Spécifier le domaine d'interprétation, les variables et les prédicats utilisés

Exemple

- Assertions
  - Tous les humains sont mortels
  - Tout humain à une mère
  - Il existe des humains jumeaux
- Représentation en prédicats quantifiés
  - $\Omega_{\mathcal{J}} = \{humanité\}, \mathcal{V} = \{x, y\}, \mathcal{P} = \{mortel, mere, jumeaux\}$
  - $\forall x\ mortel(x)$ Pour tout humain x, x est mortel

Exemple

- Assertions
  - Tous les humains sont mortels
  - Tout humain à une mère
  - Il existe des humains jumeaux
- Représentation en prédicats quantifiés
  - $\Omega_{\mathcal{J}} = \{humanité\}, \mathcal{V} = \{x, y\}, \mathcal{P} = \{mortel, mere, jumeaux\}$
  - $\forall x \; mortel(x)$
  - $\forall x \; \exists y \; mere(x, y)$ Pour tout humain x il existe un humain y qui est sa mère

Exemple

- Assertions
  - Tous les humains sont mortels
  - Tout humain à une mère
  - Il existe des humains jumeaux
- Représentation en prédicats quantifiés
  - $\Omega_{\mathcal{J}} = \{humanité\}, \mathcal{V} = \{x, y\}, \mathcal{P} = \{mortel, mere, jumeaux\}$
  - $\forall x\ mortel(x)$
  - $\forall x\ \exists y\ mere(x, y)$
  - $\exists x\ \exists y\ jumeaux(x, y) \wedge jumeaux(y, x)$

Il existe un humain x et il existe un humain y qui sont jumeaux

Fonctions

- **Définition**: Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une **fonction** est une application qui associe à un tuple d'éléments de $\Omega_{\mathcal{I}}$ un et un seul autre élément de $\Omega_{\mathcal{I}}$.

Fonctions

- **Définition**: Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une fonction est une application qui associe à un tuple d'éléments de $\Omega_{\mathcal{I}}$ un et un seul autre élément de $\Omega_{\mathcal{I}}$.

  Plus formellement, une fonction f est telle:

$$f: \begin{array}{ccc} \Omega_{\mathcal{I}}^{n} & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{I}} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Fonctions

- **Définition**: Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une fonction est une application qui associe à un tuple d'éléments de $\Omega_{\mathcal{I}}$ un et un seul autre élément de $\Omega_{\mathcal{I}}$.

  Plus formellement, une fonction f est telle:

$$f\colon \begin{array}{ccc} \Omega_{\mathcal{I}}^{n} & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{I}} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

- **Prédicat**: Une fonction peut être argument d'un prédicat

Fonctions

- **Définition**: Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation. Une fonction est une application qui associe à un tuple d'éléments de $\Omega_{\mathcal{I}}$ un et un seul autre élément de $\Omega_{\mathcal{I}}$.

  Plus formellement, une fonction f est telle:

$$f: \begin{array}{ccc} \Omega_{\mathcal{I}}^{n} & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{I}} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

- **Prédicat**: Une fonction peut être argument d'un prédicat

- **Notation**: L'ensemble des fonctions est noté $\mathcal{F}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}} = \{0, 1,2,3,4\}$, soit $\mathcal{V} = \{x, y\}$ et soit $perm(x, y)$ le prédicat représentant l'assertion « $y = (x + 2) \bmod 5$ »

- L'assertion « $y = (x + 2) \bmod 5$ » peut être représentée comme la fonction $f(x) = (x + 2) \bmod 5$

Syntaxe de la logique du premier ordre

- La **syntaxe** de la logique du premier ordre est une formalisation selon un **vocabulaire** précis

Syntaxe de la logique du premier ordre

- La **syntaxe** de la logique du premier ordre est une formalisation selon un **vocabulaire** précis
- Cette syntaxe vise au **déterminisme** et à la **validité** des représentations logiques

Syntaxe de la logique du premier ordre

- La **syntaxe** de la logique du premier ordre est une formalisation selon un **vocabulaire** précis
- Cette syntaxe vise au **déterminisme** et à la **validité** des représentations logiques
- Repose sur la définition de **termes**, d'**atomes** et de **formules**

Terme

- **Définition:** Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables, $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions. L'ensemble des **termes** du calcul des prédicats, noté $\mathcal{T}$, est défini tel que:

Terme

- **Définition:** Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables, $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions. L'ensemble des **termes** du calcul des prédicats, noté $\mathcal{T}$, est défini tel que:
  - Toute constante est un **terme**: $\forall \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$

Terme

- **Définition:** Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables, $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions. L'ensemble des **termes** du calcul des prédicats, noté $\mathcal{T}$, est défini tel que:
  - Toute constante est un **terme**: $\forall c \in \mathcal{C}, c \in \mathcal{T}$
  - Toute variable est un **terme**: $\forall v \in \mathcal{X}, v \in \mathcal{T}$

Terme

- **Définition:** Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables, $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions. L'ensemble des **termes** du calcul des prédicats, noté $\mathcal{T}$, est défini tel que:
  - Toute constante est un **terme**: $\forall \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$
  - Toute variable est un **terme**: $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$
  - Toute fonction dont les arguments sont des termes est un **terme**:

$$\forall \boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n}, \in \boldsymbol{\mathcal{T}}, \forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n}) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$$

Atome

- **Définition:** Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats et soit $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats d'arité n.

Atome

- **Définition:** Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats et soit $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats d'arité n.

  L'ensemble des **atomes** du calcul des prédicats, noté $\mathcal{A}$, est défini tel que tout $P \in \mathcal{P}_n$ est un **atome** si et seulement si tous ses arguments sont des termes.

Atome

- **Définition:** Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats et soit $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats d'arité n.

  L'ensemble des **atomes** du calcul des prédicats, noté $\mathcal{A}$, est défini tel que tout $P \in \mathcal{P}_n$ est un **atome** si et seulement si tous ses arguments sont des termes. Plus formellement:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_n}, \forall \boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n}) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

Atome

- **Définition:** Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats et soit $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des prédicats d'arité n.

  L'ensemble des **atomes** du calcul des prédicats, noté $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, est défini tel que tout $P \in \mathcal{P}_n$ est un **atome** si et seulement si tous ses arguments sont des termes. Plus formellement:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_n}, \forall \boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n} \in \boldsymbol{\mathcal{T}}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t_1}, \dots, \boldsymbol{t_n}) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

- **Constantes propositionnelles:** Les constantes $\top$ $(vrai)$ et $\bot$ $(faux)$ étant des prédicats d'arité 0, ils sont des éléments de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1
- On a:
  - x, c

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes

    $x \in \mathcal{X}$ et c $\in \mathcal{C}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1
- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme

    $x, z \in \mathcal{X} \subset \mathcal{T}$ et $f \in \mathcal{F}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1
- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme

    $x, z \in \mathcal{X} \subset \mathcal{T}, g(x) \in \mathcal{T}$ et $f \in \mathcal{F}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1
- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome

$x, z \in \mathcal{X} \subset \mathcal{T}$ et $f \in \mathcal{F}$ donc $f(x, y) \in \mathcal{T}$
$y \in \mathcal{X}$ et $p \in \mathcal{P}$ donc $p(f(x, z), y) \in \mathcal{A}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct

    $t \notin \mathcal{X}$ et $t \notin \mathcal{C}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct
  - $f(q(x), y)$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct
  - $f(q(x), y)$ n'est pas correct

    $q(x) \notin \mathcal{T}$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct
  - $f(q(x), y)$ n'est pas correct
  - T

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct
  - $f(q(x), y)$ n'est pas correct
  - ⊤ est un atome

    Par définition

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct
  - $f(q(x), y)$ n'est pas correct
  - $\top$ est un atome
  - $\forall x\, p(x)$

Exemple

- Soit $\Omega_{\mathcal{I}}$ un domaine d'interprétation et soit:
  $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables
  $\mathcal{C} = \{c, k\}$ un ensemble de constantes
  $\mathcal{F} = \{f, g\}$ un ensemble de fonctions d'arité respective 2 et 1
  $\mathcal{P} = \{p, q\}$ un ensemble de prédicats d'arité respective 2 et 1

- On a:
  - x, c sont des termes
  - $f(x, z)$ est un terme
  - $f(g(x), z)$ est un terme
  - $p(f(x, z), y)$ est un atome
  - $p(t, x)$ n'est pas correct
  - $f(q(x), y)$ n'est pas correct
  - $\top$ est un atome
  - $\forall x\, p(x)$ n'est ni un terme ni un atome

Pas de quantifieur dans un terme ou un atome

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$
  - De l'ensemble des prédicats $\mathcal{P}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$
  - De l'ensemble des prédicats $\mathcal{P}$
  - De l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$
  - De l'ensemble des prédicats $\mathcal{P}$
  - De l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$
  - De l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{K} = \{\land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$
  - De l'ensemble des prédicats $\mathcal{P}$
  - De l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$
  - De l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$
  - De l'ensemble des quantifieurs $\mathcal{Q} = \{\forall, \exists\}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$
  - De l'ensemble des prédicats $\mathcal{P}$
  - De l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$
  - De l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$
  - De l'ensemble des quantifieurs $\mathcal{Q} = \{\forall, \exists\}$
  - De l'ensemble des constantes propositionnelles $\{\top, \bot\}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **vocabulaire du premier ordre**, noté $\mathcal{V}_1$, l'ensemble composé:
  - De l'ensemble des variables $\mathcal{X}$
  - De l'ensemble des constantes $\mathcal{C}$
  - De l'ensemble des prédicats $\mathcal{P}$
  - De l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$
  - De l'ensemble des connecteurs logiques $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$
  - De l'ensemble des quantifieurs $\mathcal{Q} = \{\forall, \exists\}$
  - De l'ensemble des constantes propositionnelles $\{\top, \bot\}$

Plus formellement: $\mathcal{V} = \mathcal{X} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{K} \cup \mathcal{Q} \cup \{\top, \bot\}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **ensemble des formules du premier ordre**, noté $\mathcal{L}_1$, l'ensemble des mots formés sur le vocabulaire $\mathcal{V}_1$ tels que:

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **ensemble des formules du premier ordre**, noté $\mathcal{L}_1$, l'ensemble des mots formés sur le vocabulaire $\mathcal{V}_1$ tels que:

  $(i)\ \forall a \in \mathcal{A}, a \in \mathcal{L}_1$ Tout atome est une formule

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **ensemble des formules du premier ordre**, noté $\mathcal{L}_1$, l'ensemble des mots formés sur le vocabulaire $\mathcal{V}_1$ tels que:

  $(i)\ \forall a \in \mathcal{A}, a \in \mathcal{L}_1$

  (ii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ alors $\neg\alpha \in \mathcal{L}_1$ La négation d'une formule est une formule

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **ensemble des formules du premier ordre**, noté $\mathcal{L}_1$, l'ensemble des mots formés sur le vocabulaire $\mathcal{V}_1$ tels que:

$$(i)\ \forall a \in \mathcal{A}, a \in \mathcal{L}_1$$

$$(ii)\ \text{Si } \alpha \in \mathcal{L}_1 \text{ alors } \neg\alpha \in \mathcal{L}_1$$

$$(iii)\ \text{Si } \alpha \in \mathcal{L}_1\ et\ x \in \mathcal{X}\ alors\ \begin{cases} \forall x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \\ \exists x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$$

La quantification d'une formule est une formule

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle ensemble des formules du premier ordre, noté $\mathcal{L}_1$, l'ensemble des mots formés sur le vocabulaire $\mathcal{V}_1$ tels que:

$$(i)\ \forall a \in \mathcal{A}, a \in \mathcal{L}_1$$

$$(ii)\ \text{Si } \alpha \in \mathcal{L}_1 \text{ alors } \neg\alpha \in \mathcal{L}_1$$

$$(iii)\ \text{Si } \alpha \in \mathcal{L}_1\ et\ x \in \mathcal{X}\ alors \begin{cases} \forall x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \\ \exists x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$$

$$(iv)\ \text{Si } \alpha, \beta \in \mathcal{L}_1\ alors \begin{cases} (\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_1 \\ (\alpha \vee \beta) \in \mathcal{L}_1 \\ (\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{L}_1 \\ (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$$

Deux formules liées par un connecteur logique sont des formules

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$. L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y)$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$ (i) $p(x, y) \in \mathcal{A}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y)$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\; q(y)$ $\quad\quad\quad$ $q(y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$

$q(y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

(iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ $et\ x \in \mathcal{X}\ alors$ $\begin{cases} \forall x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \\ \exists x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ $\qquad$ $p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$

$$p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$$

$$(iii)\ \text{Si } \alpha \in \mathcal{L}_1\ et\ x \in \mathcal{X}\ alors\ \begin{cases} \forall x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \\ \exists x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y) \in \mathcal{L}_1$

$p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

(iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ $et\ x \in \mathcal{X}\ alors$ $\begin{cases} \forall x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \\ \exists x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$

(iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ $et\ x \in \mathcal{X}\ alors$ $\begin{cases} \forall x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \\ \exists x\ \alpha \in \mathcal{L}_1 \end{cases}$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y)$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y)$

$(i)\ q\big(f(z)\big) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x, y)$

$(i)\ q(f(z)) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

$(i)\ p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y)$

$(i)\ q\big(f(z)\big) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

$(i)\ p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

$$(iv)\ \text{Si } \alpha, \beta \in \mathcal{L}_1\ alors \begin{cases} (\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_1 \\ \ldots \end{cases}$$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$

$(i)\ q(f(z)) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

$(i)\ p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

(iv) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ $alors \begin{cases} (\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_1 \\ \dots \end{cases}$

Il manque les ( )

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.
  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \land p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\, (q(f(z)) \land p(x, y))$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \land p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg\exists z\ \big(q\big(f(z)\big) \land p(x, y)\big)$ $\quad (i)\ q\big(f(z)\big) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\ (q(f(z)) \wedge p(x, y))$

$(i)\ q(f(z)) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$
$(i)\ p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\ (q(f(z)) \wedge p(x, y))$

$(i)\ q(f(z)) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$
$(i)\ p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$
(iv) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ $alors$ $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x, y))$

$(i)\ q(f(z)) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

$(i)\ p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

(iv) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ $alors$ $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_1$

(iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ et $y \in \mathcal{X}$ $alors$ $\exists y\, \alpha \in \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\; q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\; \exists y\; p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg\exists z\; (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$

$(i)\; q\big(f(z)\big) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

$(i)\; p(x, y) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

(iv) Si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1\; alors\; (\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_1$

(iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1\; et\; y \in \mathcal{X}\; alors\; \exists y\; \alpha \in \mathcal{L}_1$

(ii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ alors $\neg\alpha \in \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall y\, q(x) \vee p(x, y) \wedge \top$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg\exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$

  - $\forall y\; q(x) \vee p(x, y) \wedge \top$
    $(i)\; q(x), p(x, y), \top \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\ \exists y\ p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg\exists z\ (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall y\ q(x) \vee p(x, y) \wedge \top$
    $(i)\ q(x), p(x, y), \top \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$
    (iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ *et* $y \in \mathcal{X}$ *alors* $\forall y\ \alpha \in \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$

  - $\forall y\, q(x) \vee p(x, y) \wedge \top \notin \mathcal{L}_1$

$(i)\ q(x), p(x, y), \top \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}_1$

(iii) Si $\alpha \in \mathcal{L}_1$ *et* $y \in \mathcal{X}$ *alors* $\forall y\, \alpha \in \mathcal{L}_1$

Il ne peut y avoir 2 connecteurs au même niveau

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg\exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall y\, q(x) \vee p(x, y) \wedge \top \notin \mathcal{L}_1$
  - $(f(g(z), x) \wedge p(x, y))$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x,y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x,y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q(f(z)) \wedge p(x,y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg\exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x,y)) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall y\, q(x) \vee p(x,y) \wedge \top \notin \mathcal{L}_1$
  - $(f(g(z),x) \wedge p(x,y))$

  $f(g(z),x) \notin \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Définition:** On appelle **formule stricte du premier ordre** (ou **formule stricte**) tout élément de $\mathcal{L}_1$

Exemple

- Soit $\mathcal{X} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{c, k\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ et $\mathcal{P} = \{p, q\}$.
  L'arité de p et f est de 2 et celle de g et q est de 1.

  - $p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, q(y) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall x\, \exists y\, p(x, y) \in \mathcal{L}_1$
  - $q\big(f(z)\big) \wedge p(x, y) \notin \mathcal{L}_1$
  - $\neg \exists z\, (q(f(z)) \wedge p(x, y)) \in \mathcal{L}_1$
  - $\forall y\, q(x) \vee p(x, y) \wedge \top \notin \mathcal{L}_1$
  - $(f(g(z), x) \wedge p(x, y)) \notin \mathcal{L}_1$

Langage du premier ordre

- **Syllogisme:**

  Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme
  donc Socrate est mortel

Langage du premier ordre

- **Syllogisme:**

  Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme donc Socrate est mortel

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}} = \{les\ êtres\ vivant\}$, $\mathcal{X} = \{x\}$, $\mathcal{C} = \{Socrate\}$ et $\mathcal{P} = \{h, m\}$ où $p(x)$ représente « $x\ est\ un\ homme$ » et $m(x)$ représente « $x\ est\ mortel$ »

Langage du premier ordre

- **Syllogisme:**

  Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme donc Socrate est mortel

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}} = \{les\ \hat{e}tres\ vivant\}$, $\mathcal{X} = \{x\}$, $\mathcal{C} = \{Socrate\}$ et $\mathcal{P} = \{h, m\}$ où $p(x)$ représente « x *est un homme* » et $m(x)$ représente « x *est mortel* »

$$\forall x\left(h(x) \rightarrow m(x)\right)$$
$$h(Socrate)$$
$$m(Socrate)$$

Langage du premier ordre

- **Syllogisme:**

  Tous les hommes sont mortels or Socrate est un homme donc Socrate est mortel

- Soit $\Omega_{\mathcal{J}} = \{les\ \hat{e}tres\ vivant\}$, $\mathcal{X} = \{x\}$, $\mathcal{C} = \{Socrate\}$ et $\mathcal{P} = \{h, m\}$ où $p(x)$ représente « x *est un homme* » et $m(x)$ représente « x *est mortel* »

$$\forall x\big(h(x) \to m(x)\big)$$
$$h(Socrate)$$
$$m(Socrate)$$

Comment représenter la déduction ? Le raisonnement ?